Eğitim ve Bilim

tedmem

Cilt 45 (2020) Sayı 204 111-141

Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Tahmini Öğrenme Yol Haritası Çerçevesinde Tasarlanan Bir Öğretim Deneyindeki Matematiksel Soyutlama Süreçleri *

Faik Camci [1], Dilek Tanışlı [2]

Öz

Bu araştırmada tahmini öğrenme yol haritası çerçevesinde tasarlanan sınıf tabanlı bir öğretim deneyinde odak olarak belirlenen üç altıncı sınıf öğrencisinin dikdörtgen prizmaların hacmini ölçme konusuna ilişkin matematiksel soyutlama süreçleri izlenerek soyutlama mekanizmaları ortaya konulmuştur. Aynı zamanda sosyal ve sosyomatematiksel normların bu süreçteki rolü de betimlenmiştir. Öğretim deneyi, 12 öğrenciden oluşan tüm sınıf tartışmaları ve düşük, orta, yüksek başarı düzeyine sahip üç kişiden oluşan küçük grup tartışmaları şeklinde iki aşamada ve toplam dokuz haftada gerçekleştirilmiştir. Küçük gruplardan biri odak grup olarak seçilmiştir. Araştırmanın sonunda başta düşük ders başarı düzeyine sahip olan öğrenci olmak üzere odak olan üç öğrencinin de dikdörtgen prizmalarda hacim ölçme konusuna ilişkin derin (düşünmeye dayalı) düzeyde soyutlama yaptıkları ortaya konulmuştur. Bununla birlikte bu süreçte odak öğrencilerin derin düzeyde matematiksel soyutlamalarında kendi bireysel eylemlerinin yanı sıra fikirlerini ve çözümlerini açıklama-gerekçelendirme, mutabık ya da karşı olma, birbirlerini dinleme, anlamaya çalışma ve sorgulama gibi sosyal ve kabul edilebilir bir matematiksel açıklama-gerekçelendirmede bulunma, matematiksel çözümler yapma gibi sosyomatematiksel normların destekleyici bir rol oynadığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler

Hacim ölçme
Tahmini öğrenme yol haritası
Matematiksel soyutlama
Sosyal ve sosyomatematiksel normlar
Öğretim deneyi

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 28.01.2019
Kabul Tarihi: 30.07.2020
Elektronik Yayın Tarihi: 20.09.2020

DOI: 10.15390/EB.2020.8464

* Bu makale Faik Camci'nin Dilek Tanışlı danışmanlığında yürüttüğü "Altıncı sınıf öğrencilerinin tahmini öğrenme yol haritası çerçevesinde tasarlanan bir öğretim deneyindeki matematiksel soyutlama süreçleri" başlıklı doktora tezinden üretilmiştir.

[1] Milli Eğitim Bakanlığı, Eskişehir Sabri Kılıçoğlu Ortaokulu, Türkiye, faikcamci02@hotmail.com.tr
[2] Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, dtanisli@anadolu.edu.tr

Giriş

Matematik eğitiminde yapılandırmacı yaklaşım birçok deneysel ve teorik çalışmanın odak noktasını oluşturmaktadır. Bununla birlikte Simon'un (1995) da ifade ettiği gibi, hem matematik eğitimindeki değişim hareketlerinin biçimlendirilmesine hem de öğrenmenin ve öğrencilerin daha iyi anlaşılmasında matematik eğitimcilerine elverişli yollar sağlamaktadır. Öte yandan yapılandırmacı yaklaşım matematiğin nasıl öğretileceğine yönelik yönlendirici genel bir çerçeve sunsa da, matematik öğretimine dönük pedagojik olarak özel bir öğretim yolu ortaya koyamamaktadır (diSessa ve Cobb, 2004; Simon, 1995). Bu nedenle yapılandırmacı yaklaşım doğrultusunda öğrencilerin matematiksel düşünmelerini dikkate alan öğretim modellerine ihtiyaç duyulmaktadır (Simon, 1995). Başka bir deyişle öğrencilerin matematiksel düşünmelerine odaklanmanın ve matematiksel düşünmeye teşvik etmenin önemi üzerinde uzlaşılmaktadır (Simon, 2006). Öğrenci düşünmelerini göz önünde bulunduran yapılandırmacı matematik öğretim araçlarından biri de Simon (1995) tarafından geliştirilen tahmini öğrenme yol haritası [TÖYH] teorik çerçevesidir. TÖYH'nin matematiksel bir kavramın öğretiminde öğrencilerin çözüm stratejilerini, kavram yanılgılarını ve öğrenme yollarını anlamak için önemli bir araç olduğu belirtilmektedir (Simon, 1995; Simon, vd., 2010).

Türkiye'de 2005'ten bu yana programlarda açıkça ifade edilmemesine karşın uygulanan matematik dersi öğretim programları yapılandırmacı perspektif dikkate alınarak hazırlanmıştır. Ancak matematik eğitiminde henüz istenen gelişimin sağlanamadığı söylenebilir. Nitekim Türkiye'deki öğrencilerin PISA matematik okuryazarlığı alanındaki ortalama puanları yıllara göre incelendiğinde PISA 2015 performanslarının PISA 2009 ve 2012'ye göre daha düşük olması bu durumu desteklemektedir (Taş, Arıcı, Ozarkan ve Özgürlük, 2016). Dolayısıyla uygulanan öğretim programları ile istenen gelişimin sağlanamaması iki noktada değerlendirilebilir. Bunlardan ilki diSessa ve Cobb, (2004) ile Simon (1995)'un da belirttiği gibi derslerde öğrenme ile öğretme arasında köprü kurma konusundaki eksiklik, diğeri ise ortaokul matematik dersi öğretim programlarında matematik öğretiminde öğrenmenin bilişsel boyutunun sosyal boyutuna kıyasla daha ön planda ele alınması olabilir. Üstelik Özmantar, Bingölbali, Demir, Sağlam ve Keser (2009)'nin de ifade ettiği gibi örneğin 2005 programında öğretmen ve öğrenciler için tanımlanan roller, sınıf içinde oluşturulması gereken sosyal ve sosyomatematiksel normlar hakkında ipuçları vermekte ancak doğrudan bu normlar vurgulanmamaktadır. Dolayısıyla bu araştırmada öğrenme ve öğretme arasında geçişi sağlayan TÖYH teorik çerçevesi dikkate alınarak dikdörtgen prizmalarda hacim ölçme konusu üzerine bir öğretim tasarlanmış ve uygulanmıştır.

Hacim kavramı, en, boy, yükseklik (boyut), taban, taban alanı, uzay gibi geometrik kavramlar için önemli görülmektedir (French, 2004). Bu nedenle hacim ölçme, okul matematiğinin önemli bir parçası olarak görülmekte ve dolayısıyla öğrencilerin bu konuda sahip oldukları güçlüklerin belirlenmesinin yanı sıra bu konuyla ilgili anlayışlarını nasıl geliştirdiklerinin ve nasıl düşündüklerinin anlaşılmasının önemi vurgulanmaktadır (Kim, 2016). Öte yandan yapılan çalışmalar hacim ölçmede öğrencilerde yaygın kavram yanılgılarının ve güçlüklerinin olduğunu da göstermektedir (Battista ve Clements, 1996; Ben-Chaim, Lappan ve Houang, 1985; Hirstein, 1981; Olkun, 2003; Tan-Şişman ve Aksu, 2016; Zembat, 2009). Hirstein (1981), farklı yaş grubunda bulunan öğrencilerin prizma biçiminde olan yapılarda birim küp sayılarını hesaplarken yüzeylerdeki birim kareleri ve görünen birim küpleri sayma gibi çeşitli hatalar yaptıklarını bu nedenle de bu yapılarda birim küp sayılarına ulaşmakta güçlükler yaşadıklarını vurgulamıştır. Ben-Chaim ve diğerleri (1985) da prizma biçiminde olan yapılarda öğrencilerin yüzeylerdeki birim kareleri ve birim küpleri saymakla birlikte hesapladıkları sayının iki katını aldıklarını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte öğrencilerin prizma yapılarda köşe ve kenarlardaki birim küpleri birden fazla sayıda saydıklarını ve çizim olarak verilen prizmaları görselleştirmekte güçlük yaşadıklarını belirtmişlerdir. Battista ve Clements (1996) ise öğrencilerde görülen bu genel yanılgılar ve güçlüklerin yanı sıra öğrencilerin "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" formülünü ezbere kullandıklarını ifade etmiş ve tüm bu durumların yetersiz uzamsal yapılandırmadan kaynaklandığını iddia etmişlerdir. Ulusal çalışmalar incelendiğinde ise uluslararası alanda yapılan çalışmalara paralel sonuçlar göze çarpmaktadır. Örneğin Zembat (2009), öğretmen adayları ve öğrencilerin hacim ölçme ile ilgili sadece "En x Boy x Yükseklik" formülüne bağlı kaldıklarını dolayısıyla da öğrencilerin kavramsal olarak hacim ölçmede hatalar yaparak yanlış genellemelere ulaştıklarını belirtmiştir. Olkun (2003) da yedinci sınıf düzeyinde olan birçok öğrencinin bile dikdörtgen prizma biçiminde olan yapılarda küp sayısını hesaplamakta güçlükler yaşadıklarını göstermiştir. Tan-Şişman ve Aksu (2016) ise bahsedilen bu hatalarla birlikte öğrencilerin görsel olarak sunulan yapılarda birim küplerin yüzlerini sayıp prizmaların üç boyutlu olduğu düşüncesinden hareketle hesapladıkları sonucu üçle çarptıklarını ortaya koymuşlardır. Ayrıca bazı öğrencilerin prizmaların hacmini ölçmede alan ölçme bağıntısını kullandıklarını bazı öğrencilerin ise hacim ölçme bağıntılarını farklı biçimlerde hatalı olarak kullandıklarını belirtmişlerdir.

Tüm bu çalışmalar hacim ölçme ile ilgili öğrencilerin desteklenmeleri gerektiğini ortaya koymaktadır. Aynı zamanda araştırmanın bu konu üzerinde gerçekleştirilmesinde önemli etkenlerden bir diğeri de alan yazında daha güncel çalışmalara rastlanılmamasıdır. Bu doğrultuda araştırmada uygulama sınıfından odak olarak belirlenen üç öğrencinin dikdörtgen prizmaların hacmini ölçme konusuna ilişkin matematiksel soyutlama süreçlerinin izlenerek soyutlama mekanizmalarının ortaya konulması amaçlanmıştır. Cobb ve Yackel, öğrenci-öğrenci ya da öğrenci-öğretmen arasındaki sosyal etkileşimi öğrencilerin bilişsel gelişimlerinde önemli bir araç olarak değerlendirmektedir (Toluk-Uçar, 2016). Aynı zamanda bu etkileşimin ilişkili olduğu sosyal normlar ile öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri arasında güçlü bir ilişki olduğu (Yackel, Cobb ve Wood, 1993) ve normların öğrenme olanağı oluşturduğu da düşünülmektedir (Yackel ve Cobb, 1996).

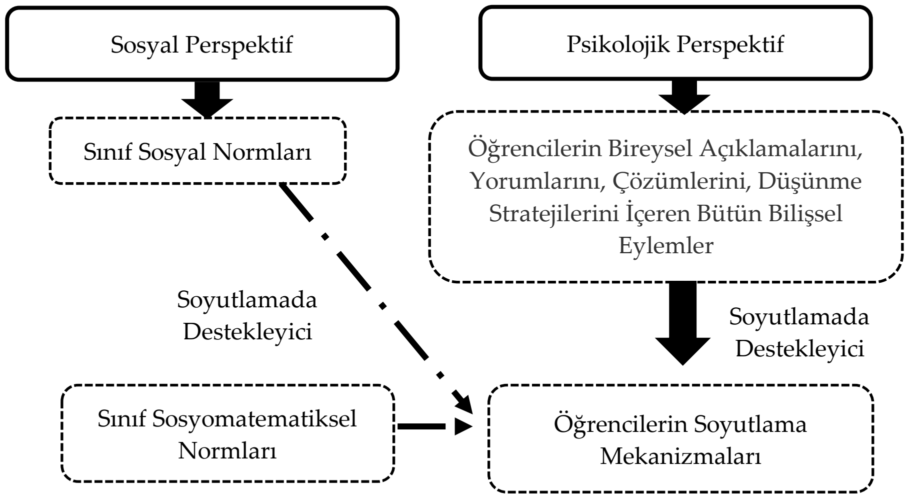
Bu düşünceden hareketle yapılandırmacılığın sosyal boyutu içerisinde yer alan sosyal ve sosyomatematiksel normların öğrenmeyi destekleyen bir öğe olabileceği düşünülmüş, sınıf uygulamalarında bu destekleyici rolün nasıl gerçekleştiği araştırmaya değer görülmüştür. Bu bağlamda araştırmanın amacına rehberlik eden araştırma soruları aşağıda sunulmuştur:

- TÖYH çerçevesi ışığında dikdörtgen prizmaların hacmini ölçme konusuna ilişkin tasarlanan öğretim deneyi süreci sonunda odak öğrencilerin soyutlama mekanizmaları nasıldır?
- TÖYH çerçevesinde tasarlanan öğretim deneyi sürecinde odak öğrencilerin matematiksel soyutlama süreçlerini öğrencilerin bireysel eylemleri ile sınıf sosyal ve sosyomatematiksel normları nasıl desteklemektedir?

Teorik Çerçeve

Matematik öğrenmede yapılandırmacılığın bilişsel ve sosyal perspektiflerinin birlikte ele alınmasının hedeflendiği bu çalışmada Gelişen Bakış Açısı [GBA] benimsenmiştir. Yapılandırmacılığın sosyal boyutu ile bilişsel boyutunu kaynaştıran, koordine eden ve eşgüdümlü olarak ele alan (Cobb ve Yackel, 1996; Mcclain ve Cobb, 2001) GBA'da sosyal ve bilişsel boyutların koordinasyonu, sınıfın ve bireysel olarak öğrencilerin birbirinden ayrı olarak düşünülemeyeceği fikrine dayanmaktadır. Dolayısıyla GBA, teorik çerçevesinde öğrenme için bireylerin bireysel eylemleri ve birbirleriyle olan etkileşimleri birlikte önemli olduğu ifade edilmektedir (Cobb, 1989, 1990; Cobb, vd., 1991; Cobb ve Yackel, 1996; Wood, Cobb ve Yackel, 1995). Bu durum nitelikli bir matematiksel öğrenme için sosyal etkileşimleri teşvik eden zengin sınıf ortamlarının oluşturulması gerektiği fikrini doğurmuştur (Cobb, Yackel ve Wood, 1992). Bu düşünce ışığında GBA'nın sosyal boyutunda yer alan sosyal ve sosyomatematiksel normlar, öğretmen ve öğrenciler tarafından kurulan sınıf mikro kültüründe önemli bir öğe olarak dikkat çekmişlerdir (Cobb, 1999; Cobb ve Yackel, 1996; Yackel ve Cobb, 1996). Sınıf uygulamalarında fikirlerini açıklama ve gerekçelendirme, diğer öğrencinin stratejilerini anlamaya çalışma, diğer öğrencilerle mutabık ya da onlara karşı olma, yanlış anlamalar meydana geldiğinde diğer öğrencilerin çözüm stratejilerini sorgulama gibi durumlar sosyal normlar olarak kabul edilmektedir (Cobb, Yackel ve Wood, 1989). Kabul edilebilir bir matematiksel açıklama-gerekçelendirme, farklı matematiksel çözüm, karmaşık bir çözüm ve etkili çözüm gibi matematiğe özgü durumlar ise sosyomatematiksel normlar olarak ifade edilmektedir (Yackel ve Cobb, 1996). Cobb ve Yackel, (1996), sosyal ve sosyomatematiksel normların öğrencilerin matematiksel tartışmalarının ve etkileşim düzeylerinin artmasına katkı sağladığını vurgulamışlardır. Sınıf sosyal etkileşiminin ise öğrencilerin matematiksel anlamalarını, öğrenmelerini ve muhakemelerini desteklediği vurgulanmaktadır (Bauersfeld, 1980, 1988; Cobb, Boufi, McClain ve Whitenack, 1997; Yackel, Cobb ve Wood, 1991). Bu nedenle de etkileşimi arttıran normlar (Yackel vd., 1993) ile öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri arasında kuvvetli bir ilişki olduğu ifade edilmektedir (Yackel ve Cobb, 1996).

Bu araştırma sınıf tabanlı bir öğretim deneyi olmasından dolayı doğası gereği araştırmada matematik öğrenme için GBA teorik çerçevesine bağlı kalınmış ve bu teori ışığında matematiksel öğrenmenin analizi için Şekil 1'de görülen bir yorumlayıcı çerçeve oluşturulmuştur.



Şekil 1. Araştırmada Matematiksel Öğrenmenin Analizi İçin Oluşturulan Yorumlayıcı Çerçeve

Şekil 1'de görüldüğü gibi, öğrencilerin bireysel olan bilişsel eylemleri ve soyutlama mekanizmaları yorumlayıcı çerçevenin psikolojik perspektifini oluştururken, sosyal ve sosyomatematiksel normlar sosyal perspektifini oluşturmaktadır. Bu çalışmada psikolojik perspektif bağlamında odak öğrencilerin soyutlama mekanizmalarının ortaya konulmasında Piaget'in soyutlama teorisi benimsenmiştir. Piaget, bireylerde öğrenmenin farklı düzeylerde gerçekleştiğini iddia etmiş ve bu durumu alan yazına kazandırdığı soyutlama teorisiyle açıklamıştır. Piaget'in geliştirdiği soyutlama teorisi, deneysel (empirical) soyutlama ve derin (düşünmeye dayalı-reflective) soyutlama olmak üzere iki ana gruba ayrılmaktadır (Cobb, 1994; Piaget, 2001). Derin soyutlama, bireyin eylemleri ve bu eylemlerin koordinasyonuna ilişkin olarak kurduğu zihinsel ilişkilere dayanmakta iken deneysel soyutlama nesnelerin doğrudan gözlemlenebilen özelliklerine dayanmaktadır. Bu bağlamda derin soyutlamanın kaynağı, mantıksal-matematiksel bilgi iken deneysel soyutlamanın kaynağı ise fiziksel bilgidir (Von Glasersfeld, 1995; Piaget, 2001; Zembat, 2016). Bu doğrultuda araştırmada öğrencilerin dikdörtgen prizmaların hacmini ölçme konusuna ilişkin soyutlama süreçleri izlenmiş ve soyutlama mekanizmaları ortaya konulmuştur. Öğrencilerin matematiksel soyutlamalarında destekleyici olan bireysel bilişsel eylemlerinin yanı sıra sosyolojik faktörlerin analizi için de sınıf sosyal ve sosyomatematiksel normları göz önünde bulundurulmuştur. Normlar bu araştırmada öğrencilerin matematiksel soyutlamalarını nasıl desteklediğini açıklamak için kullanılmıştır. Bu doğrultuda araştırmada öğrenciler tarafından kabul görerek benimsenen, tartışmalarda sıklıkla kullanılan ve öğrencilerin zihinsel eylemlerinde önemli değişiklikler yarattığı gözlenen normlara odaklanılmıştır. Bu araştırmada bahsedilen tüm normlara, GBA teorik çerçevesi doğrultusunda Cobb ve çalışma ekibinin pek çok çalışmalarında (Cobb vd., 1989; Cobb ve Yackel, 1996; Mcclain ve Cobb, 2001; Yackel ve Cobb, 1996) etkileşim bağlamlarında geliştirdikleri ve alan yazına kazandırdıkları şekliyle yer verilmiştir.

Yöntem ve Araştırma Dizaynı

Araştırmanın temel amacı doğrultusunda öğretim deneyi (teaching experiment) araştırma deseni olarak kullanılmıştır (Wood, Cobb ve Yackel, 1990). Öğretim deneyinde GBA kuramsal çerçevesi doğrultusunda yapılandırmacı yaklaşım ilkeleri benimsenmiştir.

Tahmini Öğrenme Yol Haritası

Simon (1995, s.135), TÖYH'yi "öğrenmenin ilerleyebileceği yola ilişkin öğretmenin tahmini" olarak ifade etmiştir. TÖYH; öğretmenin öğrenciler için belirlediği öğrenme amacı ya da hedefi, öğrenmeyi destekleyecek etkinlik ya da plan ve öğretmenin öğrenmenin nasıl ilerleyeceğine ilişkin hipotezleri olmak üzere üç ana bileşenden oluşmaktadır. Bu araştırmada matematik öğretimi için farklı yaklaşımlardan biri olan TÖYH, Simon'ın (1995) alana kazandırdığı biçimde ele alınmıştır. Başka bir deyişle TÖYH, yapılandırmacılığa uygun bir öğretim süreci gerçekleştirilmesinde pedagojik bir yol sağlaması amacıyla ders tasarım aracı olarak kullanılmıştır. Bu bağlamda önce öğrenciler için öğrenme amacı olarak dikdörtgen prizmaların hacmini ölçme konusu belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin yeterlikleri ve ön bilgileri belirlenmiş, buna yönelik etkinlik ve ders planları hazırlanmıştır. Dikdörtgen prizmaların hacmini ölçmeye yönelik etkinlikler ise öğrenmenin nasıl gerçekleşeceğine ilişkin hipotezlere uygun biçimde hazırlanmıştır. Öğrenmenin nasıl gerçekleşeceği ile ilgili aşağıdaki hipotezler kurulmuştur:

- Öğrencileri derin (düşünmeye dayalı) soyutlamaya sevk edecek biçimde öğrencilerin hacim kavramını anlamlandırarak dikdörtgen prizmalarda hacim ölçme bağıntılarının altında yatan zihinsel ilişkileri keşfetmeleri
- Öğrencilerin derin (düşünmeye dayalı) soyutlama yaparak dikdörtgen prizmalarda hacim ölçme bağıntılarını oluşturmaları

Bu hipotezler oluşturulurken alan yazında hacim ölçme bağıntılarının ezbere oluşturulduğu vurgusu göz önünde bulundurulmuş, bu nedenle de bağıntıların altında yatan ilkelerin kazandırılması (Battista, 2007; Battista ve Clements, 1996; Zembat, 2009) ve etkinliklerle öğrencilerin derin düşünmeye sevk edilmesi gerektiği (Zembat, 2007) önerileri dikkate alınmıştır.

Tahmini Öğrenme İlerleyişi ve Öğretim Deneyi Uygulama Süreci

Dikdörtgen prizmaların hacmini ölçmeye ilişkin oluşturulan tahmini öğrenme ilerleyişi Tablo.1'de verilmiştir.

Tablo 1. Dikdörtgen Prizmalarının Hacmini Ölçmeye İlişkin Tahmini Öğrenme İlerleyişi

1	Dikdörtgen ve Kareyi Tanıma
2	Dikdörtgen Prizmaları Tanıma ve Temel Özelliklerini Belirleme
3	Birim Küplü Yapılarda Sayma ve Oluşturma Becerilerini Geliştirme
4	Dikdörtgenler Prizmasının Hacmini Anlamlandırma ve Hacminin Belirlenmesinde Birim Küpler Kullanmanın Gerekliliğini Anlama
5	Dikdörtgenler Prizmasının İçine Boşluk Kalmayacak Biçimde Yerleştirilen Birim Küp Sayısının Dikdörtgenler Prizmasının Hacmi Olduğunu Anlama
6	Dikdörtgenler Prizmasının Hacmini Hesaplama ile İlgili Bağıntılar Oluşturma
7	Dikdörtgenler Prizmasının Hacmini Hesaplama ile İlgili Bağıntıları Günlük Yaşam Problemleri Bağlamında Kullanabilme

Öğretim deneyi uygulama süreci; tüm sınıfla gerçekleştirilen öğretim dizileri ve odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön, ara ve son klinik görüşmelerden oluşmuştur. Öğretim dizileri haftada iki saat olmak üzere dokuz hafta sürmüş ve üç etapta yürütülmüştür. Ön klinik görüşmeler, TÖYH öğretim çerçevesinde vurgulandığı gibi öğrencilerin ön bilgilerini belirlemek amacıyla gerçekleştirilmiştir. Ön klinik görüşmelerden elde edilen verilerin analizi doğrultusunda öğrencilerin ön bilgilerindeki eksikliklerin giderilerek yeterliklerini sağlamak amacıyla TÖYH'de dikdörtgen prizmaları tanıma ve prizmaların temel özelliklerini belirlemeye yönelik üç hafta süren birinci etap öğretim dizisi planlanmış ve yürütülmüştür. Bu öğretim dizisinden sonra odak öğrencilerin bu süreçte tartışılan noktaları nasıl yapılandırdıklarını daha ayrıntılı anlamak için öğrencilerle birinci ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiş, sonrasında birim küplü yapılarda sayma ve oluşturma becerilerine yönelik bir haftalık ikinci etap öğretim dizisi planlanmış ve yürütülmüştür. İkinci etap öğretim dizisinden sonra da odak öğrencilerin bu noktaları nasıl yapılandırdığını daha ayrıntılı olarak ortaya koymak için öğrencilerle ikinci ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiş ve TÖYH'de çalışmada temel öğrenme amacı olarak belirlenen dikdörtgen prizmaların hacimlerini ölçmeye yönelik beş hafta süren üçüncü etap öğretim dizisi planlanmış ve yürütülmüştür. Öğretim dizisi sonunda ise odak öğrencilerin dikdörtgen prizmalarda hacmi ve hacim ölçmeyi nasıl yapılandırdıklarını daha ayrıntılı olarak ortaya koymak ve dikdörtgen prizmalarda hacim ölçmeye ilişkin her bir öğrencinin matematiksel soyutlamalarını gösteren mekanizmalarını ortaya koymak amacıyla da odak öğrencilerle son klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Bu araştırmada araştırmacılardan biri hem araştırmacı hem de öğretmen olarak rol üstlenmiştir. Araştırmacı öğretmen, öğretim dersleri süresince sınıf uygulamalarını yönlendirmiş ve öğrencilere rehberlik etmiştir. Diğer araştırmacı ise araştırmacı öğretmen ile birlikte etkinlikleri tasarlama, öğretimi planlama, veri toplama araçlarını oluşturma ve veri analizinde aktif rol oynamış ve gözlemci olarak uygulamalarda yer almıştır.

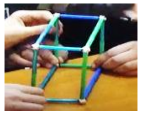
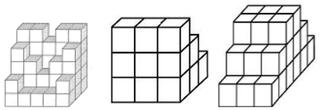
Teorik Çerçeve Işığında Hazırlanan Öğretim Etkinlik ve Materyalleri

Bu süreçte öncelikle Tablo 1'de görülen TÖYH çerçevesinde bir öğrenme ilerleyişi belirlenmiştir. Bu ilerleyişe uygun olarak uzman bir matematik eğitimcisi ile birlikte öğretim derslerinde haftalık işlenen konu ile ilgili ders planları ve etkinlikleri hazırlanmıştır. Etkinlikler hazırlanırken alanyazındaki araştırma sonuçlarından (Battista ve Clements, 1996; Ben-Chaim vd., 1985; Hirstein, 1981; Olkun, 2003; Tan-Şişman ve Aksu, 2016; Zembat, 2009) destek alınmıştır. Bu doğrultuda etkinlikler, öğrencilerin dikdörtgen prizmalarda hacim ölçme bağıntılarının altında yatan zihinsel ilişkileri keşfetmelerini sağlayarak öğrencileri düşünmeye sevk edecek biçimde tasarlanmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda dikdörtgen prizmalarda hacim bağıntısı oluşturma etkinlikleri; önce tüm birim küplerin inşa edildiği, sonra sadece boyutlarının inşa edildiği daha sonra ise yüzeyleri birim kare olan dikdörtgen prizma temsilleri olarak kurgulanmıştır. Aynı zamanda etkinlikler, genellikle öğrencilerin günlük yaşamda aşina oldukları bağlamlar üzerinden tasarlanmıştır. Tasarlanan öğretim etkinlikleri Tablo 2'de sunulmuştur. Çalışmanın sosyal perspektifi çerçevesinde ise öğretim dizileri küçük grup ve sınıf tartışmaları olmak üzere iki bölümde gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte öğretim süreci, önce küçük grupların kendi arasında etkileşimde bulunacakları biçimde daha sonra bu çalışmaların sonucunda grupların ulaştıkları sonuçların ve izledikleri yolların tartışıldığı sınıf tartışmaları biçiminde gerçekleştirilmiştir.

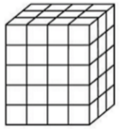
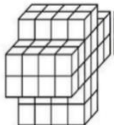
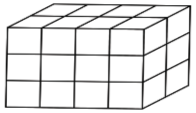
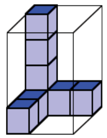
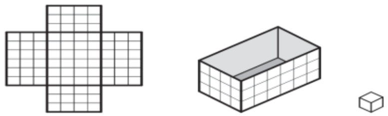
Sınıf Mikro Kültürü

Öğretimler bir araştırmacı tarafından yürütülmüştür. Öğretmen olan bu araştırmacı katılımcıları beşinci sınıftan itibaren okutmakta ve öğrencilerini iyi tanımaktadır. Öte yandan matematik eğitimi araştırmalarını takip ettiğinden normların öğrenmeyi destekleyici rolünün farkındadır ve matematik derslerini yürütürken normları dikkate almaktadır. Dolayısıyla sınıf uygulamalarında katılımcılar matematiksel çözüm süreçlerini açıklayan, gerekçelendiren, tartışmalarda arkadaşlarını dinleyen, sorgulayan, birbirlerine saygılı davranışları genel olarak öğretim sürecine başlamadan önce kazanmışlardır. Başka bir ifadeyle katılımcıların araştırmada ele alınan normlar bağlamında oluşturulan bir sınıf kültürüne alışkın oldukları söylenebilir. Bununla birlikte öğretmen, öğretim süreci içerisinde de öğrencilerden alışık oldukları bu normları küçük grup tartışmalarında sergilemelerini istemiş ve bu normları sınıf tartışmalarında kendisi de sıklıkla sergileyerek normların kullanılmasını teşvik etmiştir.

Tablo 2. Öğretim Etkinlik ve Materyalleri

Hafta	Amaç	Kurgulanan Etkinlik ve Kullanılan Materyaller	Gömülü Matematiksel Uygulamalar	Örnek Tartışma Soruları
1	Dikdörtgen ve kareyi tanır (Üç boyuta geçmeden önce öğrencilerdeki iki boyuta yönelik ön bilgilerini hatırlatma)	**Etkinlik**: Futbol Sahası 	• Dikdörtgen ve karenin uzunluk ve genişliğini belirleme • Dikdörtgensel ve karesel yüzleri tanıma • Dikdörtgen ve karenin yüzey alanını hesaplama	1. İki kale arası uzaklığa bu futbol sahasının nesi diyebiliriz? 2. Futbol sahasının içine hiç boşluk kalmadan çim ekilerek kaplanması futbol sahasının nesini oluşturur?
2 ve 3	Dikdörtgen prizmaları tanır	**Etkinlik**:Buzdolabı **Materyaller:** Günlük Yaşam Modelleri ve Geomag Çubukları   	• Dikdörtgenler prizmaların temel elemanlarını belirleme • Dikdörtgenler prizmaların boyutlarını ve tabanlarını belirleme	1. Buzdolabımız kare prizma şeklinde olsaydı buzdolabımızın yüzleri neye benzerdi? 2. Buzdolabımız kare prizma şeklinde olsaydı buzdolabımızın tabanlarının hangi yüzler olduğu belli olur muydu neden?
4	Birim küplü yapılarda sayma ve oluşturma becerilerini geliştirir ve hacmi anlamlandırır	**Etkinlik:** Aşağıda Örnekleri Verilen Birim Küp Yapıları  **Materyal:** Birim Küp Takımları 	• Birim küplerle oluşturulan farklı yapılarda birim küp sayısını hesaplama ve bu yapıları birim küpler kullanarak oluşturma • Birim küplerle dikdörtgen prizma oluşturma ve birim küp sayısını hesaplama • Birim küplerle oluşturulan yapıların boşlukta kapladığı yerin hacim olduğunu vurgulama	1. Yapılarda kaçar tane birim küp vardır, bulabilir misin? 2. Birim küpleri kullanarak uzunluğu 3 birim, genişliği 2 birim, yüksekliği 4 birim olan bir dikdörtgenler prizması oluşturabilir misin?
5	Dikdörtgenler prizmasının hacmini anlamlandırır	**Etkinlik:** Dikdörtgen Prizma Kutu  **Materyaller:** Dikdörtgen Prizma Kutu ve Günlük Yaşamdan Prizma ve Küre Görsel Temsilleri	• Dikdörtgenler prizmasının hacminin hesaplanmasında birim küpler kullanmanın gerekliliğini anlama	1. Kutu aşağıdaki tenis toplarıyla doldurulduğunda kutunun hacmini tam olarak belirleyebilir misin, nedeniyle birlikte açıklayabilir misin? 2. Kutu herhangi bir sıvı ile doldurduğunda kutunun hacmini tam olarak belirleyebilir misin, nedeniyle birlikte açıklayabilir misin?

Tablo 2. Devamı

Hafta	Amaç	Kurgulanan Etkinlik ve Kullanılan Materyaller	Gömülü Matematiksel Uygulamalar	Örnek Tartışma Soruları
6	Dikdörtgenler prizmasının içine boşluk kalmayacak biçimde yerleştirilen birim küp sayısının dikdörtgenler prizmasının hacmi olduğunu anlar.	**Etkinlik:** Sabun Kalıpları ve Kamyon Kasası    **Materyaller:** Birim Küp Takımları	• Birim küplerle oluşturulan dikdörtgen prizmalarda ve farklı yapılarda birim küp sayısını hesaplama becerilerini geliştirme	1. Yapılarda birim küp şeklinde olan sabun kalıplarından kaç tane vardır? Nasıl hesapladığınızı tartışır mısınız? 2. Yapılardaki birim küp sabun kalıplarının tamamı kamyon kasasını tam olarak doldurduğuna göre kamyon kasasının hacmi kaç birim küp sabundan oluşur?
7, 8 ve 9	Dikdörtgenler prizmasının hacmini hesaplama ile ilgili formülleri oluşturur ve günlük hayat problemleri bağlamında kullanır.	**Etkinlikler**: 1) Birim küp biçiminde sabun kalıplarından oluşturulmuş dikdörtgen prizma  2) Birim küplerle boyutları inşa edilmiş kare prizma biçiminde kutu  3) Yüzleri birim kareyle kaplanmış kutuya birim küp yerleştirme  4) Dikdörtgen prizmaların hacmini ölçmeye yönelik günlük yaşam bağlamında hazırlanmış problemler **Materyaller:** Birim Küp Takımları, Teknoloji Kullanımı	✓Birim küplerle oluşturulan dikdörtgen prizmalarda birim küp sayısını hesaplamada farklı stratejiler keşfetme	1) 1.Etkinlikte birim küp şeklinde olan sabun kalıplarının sayısı kaçtır? Nasıl hesapladığınızı açıklar mısınız? 2) 2.Etkinlikte, kutunun tamamen dolması için kaç tane daha birim küpe ihtiyacı vardır? 3) 1.ve 2.Etkinliklerde prizmaların hacmini kısa yoldan hesaplamanın sizce farklı yolları var mıdır, tartışınız? 4) 3.Etkinlikte birim küpleri yerleştirmeden kutunun alabileceği birim küp sayısını hesaplamanın kısa yolları olabilir mi, tartışınız? 5) Taban alanı 25 br^2, yüksekliği 8 br olan kare prizma biçimindeki kap yarısına kadar yağ ile dolduruluyor. Buna göre kabın içindeki yağın hacmini hesaplayınız?

Katılımcılar

Araştırmaya bir devlet okulunda öğrenim görmekte olan 12 altıncı sınıf öğrencisi gönüllü olarak katılmıştır. Araştırmanın gerçekleştirildiği okul, sosyo-ekonomik durumu orta ve düşük seviyedeki bir bölgede yer almaktadır. Öğretim dizilerinde küçük gruplar oluşturulurken ders başarı düzeyleri düşük, orta ve yüksek olan öğrencilerin bir arada olmasının yanı sıra birbirleriyle uyumlu olarak çalışabilmeleri ve daha rahat şekilde iletişim kurabilmeleri göz önünde bulundurulmuştur. Bu gruplar arasından biri de odak grup olarak belirlenmiş ve bu grupta düşük başarı düzeyine sahip öğrenci için Ali, orta başarı düzeyine sahip öğrenci için Emre ve yüksek başarı düzeyine sahip öğrenci için de Murat kod ismi belirlenmiştir. Bulgular sunulurken klinik görüşme tablolarında Ali, Emre ve Murat'ın isimlerinin baş harfleri kullanılmıştır.

Veri Toplama

Araştırmada veriler; odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön, ara ve son klinik görüşmelerden, öğretim derslerinin ve küçük grup çalışmalarının video kayıtlarından, küçük grup tartışmalarında etkinliklerde kullanılan çalışma kâğıtlarından ve öğrenci günlüklerinden elde edilmiştir. Bu bağlamda araştırmacı-öğretmen tarafından biri araştırmanın başında ikisi öğretim esnasında ve biri de öğretim sonunda olmak üzere her biri yaklaşık birer ders saati süren dörder klinik görüşme gerçekleştirilmiş ve video ile kayıt altına alınmıştır. Ön klinik görüşmelerde odak öğrencilere dikdörtgen prizmaları tanımaya; taban, yüzey ve boyut gibi temel eleman özelliklerini belirlemeye; birim küplerle oluşturulmuş prizma olan ve olmayan birbirinden farklı yapılarda birim küp sayısını hesaplamaya ve görsel temsili verilen yapıları birim küplerle inşa etmeye ilişkin sorular sorulmuştur. Birinci ve ikinci ara klinik görüşmeler, ön klinik görüşmelerde tespit edilen eksikliklerin dört haftalık süreçte nasıl değiştiğini anlamak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Son klinik görüşmelerde ise birim küpleri kullanarak odak öğrencilerin dikdörtgen prizmaların hacmini ölçmeyi ve bunun sonucunda oluşturduğu bağıntıları nasıl yapılandırdıklarını anlamaya ilişkin sorular sorulmuştur. Ayrıca araştırmada tüm öğrencilere her dersin sonunda o derste yaşananlar ile ilgili yarı yapılandırılmış soruların yer aldığı günlükler dağıtılmıştır. Öğrencilerin sınıf düzeyi bakımından duygu ve düşüncelerini tam olarak ifade etmekte zorlanabilecekleri düşünülerek günlükler, yarı yapılandırılmış biçimde hazırlanmıştır. Yarı yapılandırılmış günlükler; ders esnasında öğrencilerin öğrendikleri ve güçlük yaşadıkları noktaların, küçük grup çalışmalarında birbirleriyle olan uyumlarının ve sınıfta kamera çekimi ile ilgili konularda duygu ve düşüncelerinin öğrenilmesi amacıyla hazırlanmıştır.

Verilerin Analizi

Verilerin analizi, sürekli analiz ve geriye dönük analiz olmak üzere iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın veri analiz sürecinde kullanılan sürekli analiz ve geriye dönük analiz aşamaları Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3. Veri Analiz Süreci

1. Aşama		2. Aşama		3. Aşama	
Ön Klinik Görüşme Sonrası	Sürekli Analiz 1	Öğretim Dizileri ve Ara Klinik Görüşmeler Sonrası	Sürekli Analiz 2	Son Klinik Görüşme Sonrası	Sürekli Analiz 3
Geriye Dönük Analiz					
Öğrencilerin Soyutlama Mekanizmaları					

Araştırmanın sürekli analiz sürecinde araştırmacı ve bir matematik eğitimcisi, önce birbirinden bağımsız biçimde her bir klinik görüşme ve her dersin sonunda kaydedilen videoları izleyerek, öğrenci çalışma kâğıtlarını ve günlüklerini inceleyerek makro analizler gerçekleştirmişlerdir. Daha sonra bir araya gelen araştırmacılar sonuçları tartışmış ve bu doğrultuda öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri ve yapılandırdıkları noktaları tespit ederek haftalık öğretim ders plan ve etkinlik içeriklerini biçimlendirmişlerdir.

Araştırmanın geriye dönük analiz sürecinde ise odak öğrencilerle gerçekleştirilen tüm klinik görüşmeler ve öğretim dersleri ile ilgili dökümler yapılmıştır. Her bir klinik görüşme ve öğretim dersinin videoları, odak grup tartışmalarında kullanılan çalışma kâğıtlarından elde edilen tüm veri seti, araştırmacılar tarafından önce birbirinden bağımsız olarak mikro analize tabi tutulmuştur. Bu süreçte araştırmacılar, birbirinden bağımsız olarak gerçekleştirdikleri analizler sonucunda odak öğrencilerle gerçekleştirilen her bir klinik görüşmede öğrencilerin gösterdikleri "fiziksel-zihinsel eylemlere" ilişkin tema, alt tema ve kodları belirlemişlerdir. Öğretim dizilerine ilişkin olarak yaptıkları analizler sonucunda ise haftalık olarak küçük grup ve sınıf tartışmalarında öğrencilerin "sergiledikleri eylemlere" yönelik güçlük yaşanan ve yapılandırılan fiziksel-zihinsel eylemler ve sınıf normları ana temalarını ve bu temalara ilişkin alt tema ve kodları belirlemişlerdir. Daha sonra iki araştırmacı, birlikte tüm veri seti üzerinde birbirinden bağımsız olarak yaptıkları analizleri de dikkate alarak elde ettikleri sonuçları tartışmış ve klinik görüşmeler ile öğretim derslerine ilişkin tema, alt tema ve kodları yeniden biçimlendirmişlerdir. Güvenirliği sağlamak amacıyla da kodlama güvenirliğine gidilmiş ve iki araştırmacının gerçekleştirdiği kodlamalar karşılaştırılarak görüş birliği ve görüş ayrılığı tespit edilerek görüş ayrılığı olan kodlar üzerinde tartışılarak uzlaşmaya varılmıştır. Yapılan tüm analizler sonucunda en son olarak Ali, Emre ve Murat'ın dikdörtgen prizmalarda hacim ölçmeye ilişkin soyutlama mekanizmaları iki araştırmacı tarafından ortaya konmuştur.

Bulgular

Bulgular; ön klinik görüşmeler, birinci ve ikinci etap öğretim dizileri ve ara klinik görüşmeler, üçüncü etap öğretim dizisi ve son klinik görüşmeler şeklinde üç başlık altında sunulmuştur.

Ön Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular

Ön klinik görüşmelerde öğrencilerin sergiledikleri fiziksel-zihinsel eylemlere ilişkin bulgular, dikdörtgen prizmaları tanıma ve temel özelliklerini belirleme ile birim küplü yapılarda sayma ve yapıları oluşturma olmak üzere iki ana tema altında Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4'te görüldüğü gibi, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip Emre ve Murat dikdörtgen prizmaları üç boyutlu algılayıp doğru adlandırırken, düşük başarı düzeyine sahip Ali, dikdörtgenler prizmasını ve kare prizmayı dikdörtgen, küpü ise kare olarak ifade etmiştir. Aynı zamanda Ali dikdörtgen prizmasının görsel temsilleri ile somut temsillerini birbirleriyle eşleştirirken "Birbirlerine benziyorlar." şeklinde ifade ederek biçimsel bir benzetme yapmıştır. Hacim kavramını ve bağıntılarını oluşturmada önemli bir yere sahip olan birim küple ilgili de Ali herhangi bir açıklamada bulunamazken, Emre birim küpü "küçük şey" olarak biçimsel, Murat ise "herhangi bir küpten farkı olmayan nesne" şeklinde ayrıtı değişebilen olarak algılamıştır.

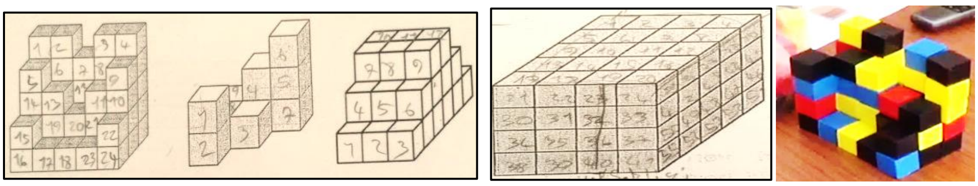
Öğrenciler dikdörtgen prizmaların temel özelliklerini açıklarken de özellikle prizmaların tabanını ve boyutlarını belirlemede güçlük çekmişlerdir. Ali ve Emre, dikdörtgen prizmaların bir tane tabana sahip olduğunu ifade ederek, tabanı "prizmanın zemine değen kısmı" olarak düşünmüşlerdir. Bununla birlikte üç öğrenci de dikdörtgen prizmaların boyutlarını doğru belirleyememiştir. Öğrenciler, özellikle "yükseklik" boyutunu "uzunluk" olarak ifade etmişlerdir.

Tablo 4. Ön Klinik Görüşmelerde Odak Öğrencilerin Sergiledikleri Fiziksel-Zihinsel Eylemler

Dikdörtgen Prizmaları Tanıma ve Temel Özelliklerini Belirleme		**Birim Küplü Yapılarda Sayma ve Yapıları Oluşturma**	
✓ *Dikdörtgen prizmaları algılama* -Üç boyutlu (E, M) - İki boyutlu (A) -Biçimsel benzetme (A) ✓ *Birim küpü algılama* -Biçimsel (E) -Ayrıt değişkenliği (M)	✓ *Taban kavramı* -Yere değen yüz (A, E) ✓ *Boyut karmaşası* (A, E, M)	✓ *Birim küp sayısını hesaplama* -Görünen küpleri tek tek sayma (A, E, M) -Görünen yüzleri tek tek sayma (A) -Köşe ve kenardaki küpleri birden fazla sayma (A) -Zihinden küpleri sayma (E) -Kat ve sıra stratejisini kullanma (E, M)	✓ *Yapı oluşturma* -Görseldeki görünüme benzetme (A, E, M) -Sıra stratejisini kullanma (A, E, M) -Kat stratejisini kullanma (E)

Birim küplü yapılarda sayma ve yapıları oluşturma kapsamında öğrencilere birim küplerle oluşturulmuş bir kare prizma ve prizma olmayan birbirinden farklı üç yapının görsel temsili sunulmuştur. Öğrencilerden yapıları oluşturan birim küp sayılarını önce görsel temsil üzerinde daha sonra birim küpleri kullanarak oluşturdukları somut temsil üzerinde hesaplamaları istenmiştir. Tablo 4'te görüldüğü gibi, sayma ve yapı oluşturmada öğrencilerin kısmen de olsa doğru stratejiler kullandıkları görülmüştür. Buna karşın öğrenciler ağırlıklı olarak hatalı stratejiler kullanmış, bu nedenle de görsel temsil üzerinde birim küp sayısını hesaplama, somut temsili oluşturma ve bu temsil üzerinde birim küp sayısını hesaplamada çeşitli güçlükler yaşamışlardır. Bu güçlükler verilen yapıların basit ve karmaşık olmasına bağlı olarak farklılık göstermiştir.

Şekil 2'de görüldüğü gibi, Ali görsel temsil üzerinde küplerin yüzleri üzerine yazarak birim küp sayısını prizma olmayan yapılarda gördüğü birim küpleri, kare prizmada ise gördüğü yüzleri tek tek sayarak hesaplamıştır. Ali aynı zamanda kare prizmada köşe ve kenardaki birim küpleri birden fazla saymıştır.



(a) (b) (c) (d) (e)

Şekil 2. Ali'nin Ön Klinik Görüşmede Görsel Temsil Üzerinde Birim Küp Sayısını Hesaplamaya Dönük Eylemleri ve Oluşturduğu Somut Temsil Örneği

Ali birim küplü yapıları oluştururken, görsel temsillerden birini (Şekil 2c) sıra stratejisini (önden arkaya doğru sıra sıra dizme) kullanarak, diğerlerini ise görsel temsilin biçimsel görüntüsüne benzetmeye çalışarak inşa etmiştir. İnşa ettiği yapılarda birim küplerin sayısını hesaplarken ise yine gördüğü birim küpleri tek tek saymıştır. Ancak şekilde (Şekil 2e) bir örneği görüldüğü gibi Ali genel olarak yapıları hatalı oluşturmuş ve hatalı oluşturduğu yapılardaki birim küp sayılarını dahi hesaplayamamıştır.

Emre yapıların görsel temsili üzerinde görünmeyen birim küplerin farkında olmasına karşın Şekil 2a da bazı birim küpleri hesaplamayı ihmal etmiştir. Şekil 2b ve 2d de doğru bir hesaplama yaparken, birim küp sayısının 30 ve 38 arasında değişkenlik gösterdiği, Şekil 2c de ise sadece 36 olarak hesaplayabilmiştir. Tablo 4'te görüldüğü gibi, Emre bu hesaplamaları yaparken Şekil 2a'da önden arkaya doğru görünen ve görünmeyen birim küpleri "Önde 7 tane var onun arkasında da 7 tane öyle gider şu görünenleri de sayarsak 40 olur." şeklinde zihinden düşünerek saymaya çalışmıştır. Yanı sıra Şekil 2b de tek tek sayma, Şekil 2c de kat stratejisini (her bir katı ayrı hesaplama), Şekil 2d'de ise sıra stratejisini (önden arkaya doğru sıra sıra hesaplama) kullanmıştır. Emre görsel temsildeki yapıların somut temsillerini oluştururken de Şekil 2b ve 2d'yi doğru, Şekil 2a'yı hatalı inşa etmiştir. Şekil 2c'de ise görsel temsil üzerinde hesaplama yaparken düşündüğü gibi yapının doğru oluşumlarından sadece birini oluşturabilmiştir. Emre, Şekil 2a ve 2b'yi görsel temsil görünümüne benzeterek, Şekil 2c'yi önden arkaya doğru sıra stratejisini kullanarak ve Şekil 2d'yi ise kat stratejisini kullanarak inşa etmiştir.

Murat ise yapıların görsel temsili üzerinde birim küp sayılarını Şekil 2a'da sadece görünen birim küpleri saydığı için hatalı hesaplamıştır. Şekil 2b ve 2d'de doğru hesaplama yaparken, Şekil 2c deki birim küp sayılarını Emre ile benzer şekilde hesaplamıştır. Bunun yanı sıra bu hesaplamalarda Tablo 4'te görüldüğü gibi, Şekil 2a dışındaki yapılarda Emre'nin kullandığı stratejileri kullanmıştır. Murat görsel temsildeki yapıların somut temsillerini oluştururken Şekil 2c dışındaki tüm yapıları doğru oluşturmuştur. Şekil 2c'de ise Emre gibi yapının doğru oluşumlarından sadece birini inşa etmiştir. Murat, kare prizmayı ve farklı yapıların üçüncüsünü sıra sıra oluştururken ve farklı yapıların birinci ve ikincisini görsel temsile benzetmeye çalışarak oluşturmuştur.

Birinci ve İkinci Etap Öğretim Dizilerine ve Ara Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular

Dört hafta süren birinci ve ikinci etap öğretim dizileri, odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön klinik görüşmeler sonucu ön bilgilerinde eksik oldukları, güçlük yaşadıkları ya da kavram yanılgısına sahip oldukları tespit edilen noktalar göz önünde bulundurularak planlanmıştır.

Birinci Etap Öğretim Dizisi

Birinci etap öğretim dizisinde öğrencilerin sergiledikleri eylemler; güçlük yaşanan ve yapılandırılan fiziksel-zihinsel eylemler ve sınıf normları şeklinde ana temalar altında, Tablo 5'te sunulmuştur.

Dikdörtgen ve kareyi tanımanın amaçlandığı birinci hafta etkinliğinde öğrencilerin günlük yaşamda aşina oldukları futbol sahası bağlamı üzerine bir senaryo hazırlanmıştır. Bu etkinlik sürecinde Tablo 5'te görüldüğü gibi, küçük grup ve sınıf tartışmalarında öğrenciler genel olarak dikdörtgen ve kareyi günlük yaşam nesneleri ile özdeşleştirmişlerdir. Özellikle küçük grup tartışmalarında odak öğrencilerden Ali ve Emre dikdörtgen ve kareye günlük yaşamdan kapı, pencere gibi nesneleri, Murat ise bu nesnelerin yüzlerini örnek olarak göstermiştir. Grup tartışması sürecinde Murat'ın Ali ve Emre'nin açıklamalarına "Onlar değil" şeklinde *karşı çıkan* ve arkadaşlarını "Kapının hepsi dikdörtgen değil, kapının yüzü dikdörtgen" gibi ikna edici *matematiksel açıklama*sıyla diğer iki öğrencinin düşüncesi nesneden nesnenin yüzeyine doğru bir değişim göstermiştir. Öğretmen sınıf uygulamalarında da yaşandığı gözlenen bu güçlükleri aşmak için günlük yaşamda sıklıkla kullanılan nesne temsillerini örnek göstererek dikdörtgen ve kare ile günlük yaşam nesnelerinin arasındaki farklılıklara dikkat çekmiştir.

Tablo 5. Birinci Etap Öğretim Dizisinde Öğrencilerin Sergiledikleri Eylemler

I. Hafta	II. Hafta	III.Hafta
Güçlük Yaşanan ya da Yapılandırılan Fiziksel-Zihinsel Eylemler		
✓ *Dikdörtgen ve kareyi nesnelerle özdeşleştirme* [Küçük Grup Tartışması (**KGT**); Sınıf Tartışması (**ST**)]	✓ *Dikdörtgen prizmaları algılama* -Biçimsel benzetme ✓ *Taban kavramı* -Yere değen yüz ✓ *Boyut karmaşası* ✓ *Birim küpü algılama* -Biçimsel **[KGT, ST]**	✓ *Dikdörtgen prizmaları inşa edebilme* ✓ *Dikdörtgen prizmaların temel özelliklerini belirleyebilme* **[KGT, ST]**
Sınıf Normları		
✓ *Sosyal Normlar* -Fikirlerini açıklama -Açıklamalara karşı çıkma ya da mutabık olma -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma ✓ *Sosyomatematiksel Normlar* -Matematiksel açıklama yapma	✓ *Sosyal Normlar* -Birbirlerini sorgulama - Fikirlerini açıklama ve gerekçelendirme -Açıklamalara karşı ya da mutabık olma -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma ✓ *Sosyomatematiksel Normlar* -Kabul edilebilir ve farklı matematiksel açıklama-gerekçelendirme yapma	✓ *Sosyal Normlar* -Birbirlerini sorgulama - Fikirlerini açıklama ve gerekçelendirme -Açıklamalara karşı çıkma ve mutabık olma -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma ✓ *Sosyomatematiksel Normlar* -Birbirlerini sorgulama - Fikirlerini açıklama ve gerekçelendirme -Açıklamalara karşı çıkma ve mutabık olma -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma

Dikdörtgen prizmaları tanıma ve prizmaların temel özelliklerini belirlemenin amaçlandığı ikinci hafta etkinliğinde öğrencilerin günlük yaşamda aşina oldukları buzdolabı bağlamı üzerine bir senaryo hazırlanmıştır. Bununla birlikte günlük yaşamda sıklıkla kullanılan dikdörtgen prizma modellerinden de yararlanılmıştır. Tablo 5'te görüldüğü gibi, küçük grup tartışmasında Ali dikdörtgen prizmanın görsel ve somut temsillerini ön klinik görüşmede olduğu gibi, biçimsel olarak birbirine benzerliklerine göre eşleştirmiş ancak grup tartışma sürecinde Emre ve Murat'ın prizmanın yüz özelliklerine dayalı *kabul edilebilir matematiksel açıklama*larıyla bu hatalı düşüncesini değiştirmiştir. Diğer taraftan Ali'de daha önce gözlenen boyut karmaşası grup tartışmasında da gözlenmiştir. Bu esnada Emre ve Murat'ın Ali'yi "… bu prizmanın uzunluğunu, genişliğini ve yüksekliğini göster?" şeklindeki *sorgulama*ları ve özellikle Murat'ın dikdörtgenin boyutlarından hareket ederek prizmalarda farklı olarak yükseklik boyutunun olduğunu ifade eden *matematiksel açıklama*ları sonucu Ali prizmanın boyutlarını algılayabilmiştir. Tablo 5'te görüldüğü gibi, Ali ve Emre dikdörtgen prizmaların tabanını zemine değen tek bir yüz olarak ifade ederken, Murat tabanın iki yüz olduğunu belirterek tabanı her durumda doğru gösterebilmiştir. Ancak Murat taban yüzlerini doğru göstermesine karşın nedenine ilişkin Emre'nin "Kare prizmada nasıl koyarsak koyalım karesel yüzler taban ama dikdörtgen prizma ve küpte hep alta ve üste gelen yüzler taban diyorsun neden?" şeklindeki *sorgulama*sına ikna edici bir açıklama yapamadığından Ali ve Emre prizmaların taban yüzlerini yapılandıramamışlardır. Bunların yanı sıra küçük grup tartışmaları sürecinde üç öğrenci de Tablo 5'te görüldüğü gibi, birim küpü "küçük" şeklinde biçimsel olarak algılamış ve birim küple ilgili yüzlerinin kare olması dışında doğru açıklamalarda bulunamamışlardır. Benzer şekilde sınıf tartışmalarında da genel olarak öğrenciler, dikdörtgen prizmaların boyutlarını ve taban yüzeylerini belirleme ve birim küpü tanıma konularında zorlanmışlardır. Öğretmen sınıf uygulamalarında zorlukları aşmak için boyutları belirlemede dikdörtgenin boyutlarından yararlanmış, taban yüzeylerini belirlemede taban için gerekli koşulu açıklamıştır. Birim küp ile ilgili ise her bir boyutunun bir birim olduğunu gösteren "birim küp" adlandırmasından yararlanmıştır. Bu süreçte öğretmenin *açıklamaları,* öğrencileri *sorgulaması* ve öğrencilerin de ortaya koyduğu *sorgulama, karşı çıkma, gerekçelendirme, düşüncelerini açıklama* gibi normların desteği sonucu Ali ve Emre başta olmak üzere öğrencilerin genel olarak yaşamış oldukları güçlükler aşılmış ve öğrenciler *tartışmalar etrafında mutabık* olmuşlardır.

Üçüncü hafta etkinliğinde üç boyutluluk algısını daha da geliştirmek ve pekiştirmek için öğretim materyali olarak geomag çubuk ve mıknatısları kullanılmıştır. Tablo 5'te görüldüğü gibi, küçük grup ve sınıf tartışmalarında genel olarak öğrenciler geomag çubuk ve mıknatıslarını kullanarak dikdörtgen prizmaları oluşturmuş ve oluşturdukları prizmalar üzerinde temel özellikleri belirleyebilmiştir. Öte yandan bu etkinlik sürecinde küçük grup ve sınıf tartışmaları sırasında *fikirlerini açıklama-gerekçelendirme, arkadaşlarının açıklamalarını anlamaya çalışma, mutabık olma, birbirlerini dinleme* ve *sorgulama* gibi sosyal normlar ve *kabul edilebilir ve farklı matematiksel açıklama yapma-gerekçelendirme* gibi sosyomatematiksel normlar çok yoğun bir biçimde ortaya konmuştur. Özellikle Ali'nin bu haftaki etkinlikte ilk iki haftaya oranla grup içerisinde daha özgüvenli, katılımcı olduğu ve Emre ve Murat'ın sorularına yanıt vermekte çok istekli olduğu "Varsa sorunuz cevaplayayım." şeklinde ifadeler kullandığı gözlenmiştir.

Birinci Ara Klinik Görüşmeler

Üç haftalık birinci etap öğretim dizisinden sonra gerçekleştirilen birinci ara klinik görüşmelerde öğrencilerin sergiledikleri fiziksel-zihinsel eylemlere ilişkin bulgular, dikdörtgen prizmaları tanıma ve temel özelliklerini belirleme ana teması altında Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6. Birinci Ara Klinik Görüşmelerde Odak Öğrencilerin Sergiledikleri Fiziksel-Zihinsel Eylemler

Dikdörtgen Prizmaları Tanıma ve Temel Özelliklerini Belirleme	
✓ *Dikdörtgen prizmaları algılama* -Üç boyutlu düşünme (A, E, M) -Temel özelliklerine bağlı algılama (A, E, M)	✓ *Taban ve Boyut kavramı* -Taban yüzlerini belirleyebilme (A, E, M) -Boyutları belirleyebilme (A, E, M)

Tablo 6'da görüldüğü gibi, birinci ara klinik görüşmelerde üç odak öğrencinin de öğretim dizisi sürecinde dikdörtgen prizmaları tanıma ve prizmaların temel özelliklerini belirleme konularını ön klinik görüşmeden farklı biçimde yapılandırdıkları görülmüştür. Ali, ön klinik görüşmenin aksine dikdörtgen prizmaları üç boyutlu olarak algılamış ve dikdörtgen prizmaların görsel ve somut temsillerini eşleştirirken prizmaların temel özelliklerini dikkate almıştır. Öğrenciler, birim küpün her bir boyutunun bir birim ve tüm yüzlerin birim kare olduğunu ifade etmişlerdir. Bununla birlikte Ali ve Emre ön klinik görüşmelerin aksine dikdörtgen prizmaların taban yüzeylerini her durumda doğru belirleyebilmiş ve her üç öğrenci de taban yüzeylerini belirlemede doğru gerekçelendirmeler yapabilmiştir. Ayrıca üç öğrenci de her durumda dikdörtgen prizmaların boyutlarını doğru belirleyebilmiştir.

İkinci Etap Öğretim Dizisi

İkinci etap öğretim dizisinde öğrencilerin sergiledikleri eylemler; güçlük yaşanan ve yapılandırılan fiziksel-zihinsel eylemler ve sınıf normları şeklinde ana temalar altında, Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7. İkinci Etap Öğretim Dizisinde Öğrencilerin Sergiledikleri Eylemler

IV.Hafta	
Güçlük Yaşanan ya da Yapılandırılan Fiziksel-Zihinsel Eylemler	
✓ *Birim küplü yapıları sayma ve oluşturma*	
-Gördüğü birim küpleri tek tek sayma -Zihinden birim küpleri sayma -Kat ve sıra stratejilerini kullanma -Uzunluk x Genişlik x Yükseklik **[KGT, ST]**	-Görünmeyen birim küpleri dikkate alarak hesaplama -Kat ve sıra stratejilerini kullanma **[ST]**
Sınıf Normları	
✓ *Sosyal Normlar*	✓ *Sosyomatematiksel Normlar*
-Birbirlerini sorgulama -Fikirlerini ve çözümlerini açıklama - gerekçelendirme -Açıklamalara karşı ya da mutabık olma -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma	-Kabul edilebilir ve farklı matematiksel açıklama-gerekçelendirme yapma -Kolay ve etkili matematiksel çözümler yapma

Birim küplü yapılarda sayma ve oluşturma becerilerinin geliştirilmesinin amaçlandığı dördüncü hafta etkinliğinde öğrencilerin günlük yaşamda aşina oldukları birim küpler üzerine bir senaryo hazırlanarak birim küplerle oluşturulmuş birbirinden farklı yapılar üzerinde hesaplama ve yapıların somut temsillerini oluşturma etkinlikleri gerçekleştirilmiştir. Tablo 7'de görüldüğü gibi, küçük grup tartışması sürecinde ön klinik görüşmelerde odak öğrencilerin güçlük yaşadıkları Şekil 2a'daki yapıda birim küp sayısını hesaplama sırasında Ali görsel temsil üzerinde gördüğü birim küpleri tek tek, Emre önden arkaya doğru görünen ve görünmeyen birim küpleri zihinden düşünerek saymıştır. Murat ise ön klinik görüşmenin aksine saymaya en alttan başlamış, kat ve sıra stratejilerini kullanarak birim küp sayısını hesaplamıştır. Tablo 7'de bahsedilen sınıf normları küçük grup tartışmaları sırasında gerçekleşen eylemlerde öğrencilerin zihinsel eylemlerine yön verdiği gözlenmiştir. Örneğin birim küplü yapıları sayma sırasında Emre, Ali'nin stratejisine *karşı çıkmış* görünmeyen birim küpleri saymadığını ifade ederek Ali'nin bu noktada görünmeyen birim küplerin farkında olmasına katkı sağlamıştır. Murat'ın ise daha kısa yoldan sonuca götüren *kolay ve etkili matematiksel çözüm*ü diğer öğrencilerde farkındalık yaratmış ve bu strateji (kat ve sıra stratejisi) iki öğrenci tarafından benimsenerek daha sonraki farklı yapılarda da kullanmalarını desteklemiştir. Öte yandan grupça birim küpler kullanarak dikdörtgen prizmayı oluştururken önce boyutları inşa etmişler, sonrasında kalan kısımları tamamlamışlardır. Aynı zamanda Tablo 7'de görüldüğü gibi, inşa ettikleri dikdörtgen prizmada birim küp sayısını hesaplarken "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" stratejisini kullanmışlardır.

Sınıf tartışmaları sürecinde de genel olarak öğrencilerin küçük grup tartışmalarında belirtilen eylemlere benzer eylemler sergileyerek Tablo 7'de görüldüğü gibi, görsel figür üzerinde birim küplerle oluşturulan prizmalardan farklı yapılarda birim küp sayısını hesaplama ve birim küplerle yapıların somut temsillerini oluşturma konularında güçlük yaşamış ve güçlük yaşadıkları bu durumları günlüklerine yansıtmışlardır. Öğretmen sınıf uygulamalarında öğrencilerin görsel ve somut temsiller üzerinde birim küp sayılarını hesaplayabilmelerinde kat ve sıra stratejileri gibi farklı stratejileri keşfetmeleri ve görünmeyen birim küpleri fark etmeleri için birim küpler kullanarak çok sayıda yapı inşa etme uygulamaları gerçekleştirmiştir. Öğrenciler genel olarak sınıf tartışmalarında bu güçlükleri aşma yönünde belirtiler göstermekle birlikte birkaç öğrenci özellikle birim küp sayısı değişken, farklı oluşumlara sahip olabilen yapılarda yaşadıkları güçlükleri aşamamıştır. Sınıf tartışması sürecinde öğretmen *açıklamaları, sorgulaması* ve Murat başta olmak üzere diğer öğrencilerin birim küp sayısını hesaplamaya dönük *çözüm stratejilerini açıklamaları* ve bu stratejilerin diğer öğrenciler tarafından "Nasıl oldu?, Neden öyle?"şeklindeki *sorgulamaları*, kat ve sıra stratejileri gibi stratejilerin keşfedilmesine, benimsenmesine ve yaşanan güçlüklerin aşılmasına katkı sağladığı görülmüştür.

İkinci Ara Klinik Görüşmeler

Bir haftalık ikinci etap öğretim dizisinden sonra gerçekleştirilen ikinci ara klinik görüşmelerde öğrencilerin sergiledikleri fiziksel-zihinsel eylemlere ilişkin bulgular, birim küplü yapılarda sayma ve yapıları oluşturma ana teması altında Tablo 8'de sunulmuştur.

Tablo 8. İkinci Ara Klinik Görüşmelerde Odak Öğrencilerin Sergiledikleri Fiziksel-Zihinsel Eylemler

Birim Küplü Yapılarda Sayma ve Yapıları Oluşturma	
✓ *Birim küp sayısını hesaplama*	
-Görünmeyen birim küpleri dikkate alma (A, E, M)	✓ *Yapı oluşturma*
-Kat ve sıra stratejilerini kullanma (A, E, M)	-Kat ve sıra stratejilerini kullanma (A, E, M)
-Çarpımsal muhakeme (A, E, M)	

İkinci ara klinik görüşmelerde üç odak öğrencinin de öğretim sürecinde birim küp yapılarını sayma ve yapıları oluşturma konularını ön klinik görüşmeden farklı biçimde yapılandırdıkları görülmüştür. Ön klinik görüşmenin aksine Ali'nin birim küp yapılarında birim küp sayılarını hesaplarken "Eğer arkada ve altta birim küpler olmasaydı üsttekiler düşerdi" şeklindeki açıklamasıyla Tablo 8'de görüldüğü gibi, görünmeyen birim küpleri dikkate aldığı, birim küpleri birden fazla saymadığı, yapıların sadece görünen yüzlerini dikkate almadığı görülmüştür. Ayrıca birim küplü yapılarda yapıların her bir katındaki birim küp sayısını hesaplarken de "Bu sırada 5 tane var 3 tane beşli sıra o yüzden 3.5=15 tane birim küp" şeklinde çarpımsal muhakeme kullandığı gözlenmiştir. Bununla birlikte Tablo 8'de görüldüğü gibi, ön klinik görüşmenin aksine üç öğrenci de birim küplü yapıları saymada ve yapıları oluşturmada kat ve sıra stratejilerini birbirinden farklı tüm yapılarda farkındalığı yüksek biçimde daha anlamlı ve yapının basit ya da karmaşık olmasına göre değişmeyecek biçimde tutarlı kullanmıştır. Bununla birlikte birim Tablo 8'de görüldüğü gibi, küp yapılarının somut temsillerini kat ve sıra stratejilerini kullanarak oluşturabilmiş ve oluşturdukları yapı üzerinde yine aynı stratejileri kullanarak birim küp sayısını hesaplayabilmiştir.

Üçüncü Etap Öğretim Dizisine ve Son Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular

Beş haftalık üçüncü etap öğretim dizisi etkinlikleri, öğrencilerin içsel yapılandırma süreci dikkate alınarak kendilerinin hacim ölçme bağıntıları oluşturabilmelerine ve derin soyutlama yapabilmeleri hipotezine yönelik olarak planlanmış ve gerçekleştirilmiş, sürecin sonunda odak öğrencilerle son klinik görüşmeler yapılmıştır.

Üçüncü Etap Öğretim Dizisi

Üçüncü etap öğretim dizisinde öğrencilerin sergiledikleri eylemler; güçlük yaşanan ve yapılandırılan fiziksel-zihinsel eylemler ve sınıf normları şeklinde ana temalar altında, Tablo 9'da sunulmuştur.

Tablo 9. Üçüncü Etap Öğretim Dizisinde Öğrencilerin Sergiledikleri Eylemler

V. Hafta	VI. Hafta	VII. Hafta	VIII. Hafta	IX. Hafta
Güçlük Yaşanan ya da Yapılandırılan Fiziksel-Zihinsel Eylemler				
✓ *Dikdörtgen prizmanın hacmini anlamlandırma* -Dikdörtgen prizmanın birim küple doldurulması ile hacmi belirleyememe **[KGT]** -Dikdörtgen prizmanın farklı prizmalarla doldurulması durumunda hacmi belirleyememe -Hacim bağıntısını sıvıların hacmine entegre edememe **[KGT, ST]**	✓ *Birim küple dolu prizmanın hacmi* -Birim küple dolu prizmanın hacmini birim küp sayısı ile ilişkilendirebilme -Kat ve sıra stratejilerini kullanma **[KGT, ST]**	✓ *Hacim ölçme bağıntıları oluşturma* -Uzunluk x Genişlik x Yükseklik hacim ölçme bağıntısını ve farklı biçimlerini keşfetme **[KGT, ST]** -Üç boyuttan iki boyuta geçiş yapamama **[ST]**	✓ *Hacim ölçme bağıntıları oluşturma* -Uzunluk x Genişlik x Yükseklik bağıntısını ve farklı biçimlerini yapılandırma **[KGT, ST]** -Üç boyuttan iki boyuta geçiş yapamama **[KGT]** -Üç boyuttan iki boyuta geçiş yapabilmede güçlüğün aşılması **[ST]**	✓ *Hacim ölçme bağıntılarının günlük yaşam problemleri bağlamında kullanılması* -Diğer hacim ölçme bağıntıları ile birlikte Taban alanı x Yükseklik bağıntısını yapılandırma **[KGT, ST]**
Sınıf Normları				
✓ *Sosyal Normlar* -Birbirlerini sorgulama -Fikirlerini açıklama ve gerekçelendirme -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma -Açıklamalarda mutabık olma ✓ *Sosyomatematiksel Normlar* - Kabul edilebilir ve farklı matematiksel açıklama-gerekçelendirme yapma	✓ *Sosyal Normlar* -Fikirlerini açıklama ve gerekçelendirme -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma -Açıklamalarda mutabık olma ✓ *Sosyomatematiksel Normlar* - Kabul edilebilir bir matematiksel açıklama-gerekçelendirme -Etkili çözümler yapma	✓ *Sosyal Normlar* -Fikirlerini ve çözümlerini açıklama ve gerekçelendirme -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma -Açıklamalarda mutabık olma ✓ *Sosyomatematiksel Normlar* -Kabul edilebilir matematiksel açıklama-gerekçelendirme -Kolay, etkili ve farklı çözümler yapma	✓ *Sosyal Normlar* -Birbirlerini sorgulama -Fikirlerini açıklama ve gerekçelendirme -Açıklamalara karşı ya da mutabık olma -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma ✓ *Sosyomatematiksel Normlar* -Kabul edilebilir ve farklı matematiksel açıklama-gerekçelendirme	✓ *Sosyal Normlar* -Birbirlerini sorgulama -Fikirlerini açıklama ve gerekçelendirme -Açıklamalara karşı ya da mutabık olma -Birbirlerini dinleme ve anlamaya çalışma ✓ *Sosyomatematiksel Normlar* -Kabul edilebilir ve farklı matematiksel açıklama-gerekçelendirme -Etkili matematiksel çözüm yapma

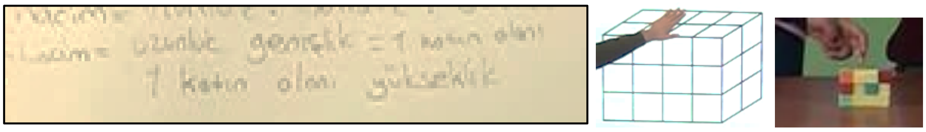
Dikdörtgen prizmaların hacmini anlamlandırma ve hacminin tam olarak belirlenebilmesi için birim küp kullanmanın gerekliliğini anlamanın amaçlandığı beşinci hafta etkinliğinde boş bir kutunun taşıma kapasitesi bağlamı üzerine bir senaryo hazırlanmıştır. Tablo 9'da görüldüğü gibi, küçük grup tartışmalarında dikdörtgen prizmaların hacminin tam olarak belirlenebilmesi için birim küp kullanmanın gerekliliğini anlama konusunda Ali güçlük yaşamıştır. Bununla birlikte küçük grup ve sınıf tartışmalarında bazı öğrenciler de, dikdörtgen prizmanın içinin birim küp dışında farklı prizmalarla doldurulması durumunda hacminin kesin olarak belirlenemeyeceğini anlamada güçlük yaşamışlardır. Öğretmen sınıf uygulamalarında bu güçlükleri aşmak için günlük yaşamda kullanılan bir dikdörtgen prizma temsili üzerinde dikdörtgen prizmanın farklı prizmalarla tam olarak her zaman dolup dolmayacağını sınıfta tartıştırarak öğrencilerin durumu fark etmelerini sağlamaya çalışmıştır. Uygulamalar sonunda ise genel olarak öğrenciler bu güçlükleri aşmış ve tartışmalar etrafında *mutabık olmuş*lardır. Bu süreçte başta Murat olmak üzere birkaç öğrenci, prizmaların birim küplerle doldurulması durumunda prizmada boşluk kalmayacağını dolayısıyla da prizmanın hacminin belirlenebileceğini somut temsil üzerinde göstermişlerdir. Bu öğrencilerin *kabul edilebilir matematiksel açıklama ve gerekçelendirmelerle düşüncelerini ifade etmeleri* ve bunların sınıfta diğer öğrenciler tarafından *sorgulanması*, güçlüklerin aşılmasına katkı sağlamıştır. Öte yandan Tablo 9'da görüldüğü gibi, odak öğrenciler küçük grup ve sınıf tartışmaları sırasında "Bir dikdörtgen prizma sıvı ile doldurulduğunda sıvının hacmi bilinmediğinde prizmanın hacminin hesaplanamaz." şeklinde bir *matematiksel açıklamada* bulunmuşlardır. Öğrenciler, dördüncü hafta keşfettikleri "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısını sadece birim küp yapılarında geçerli olduğunu düşünmüş ve bağıntıyı buraya transfer edememişlerdir.

Dikdörtgen prizmanın içine boşluk kalmayacak biçimde yerleştirilen birim küp sayısının dikdörtgen prizmanın hacmi olduğunu anlamanın amaçlandığı altıncı hafta etkinliğinde öğrencilerin günlük yaşamda aşina oldukları birim küp şeklinde sabun kalıplarının dikdörtgen prizma biçiminde kamyon kasası içine doldurulması üzerine bir senaryo hazırlanmıştır. Etkinlikte küçük grup ve sınıf tartışmalarında öğrencilerin yaşadıkları bir güçlükle karşılaşılmamasıyla birlikte Tablo 9'da görüldüğü gibi, genel olarak öğrencilerin birim küplerle oluşturulmuş dikdörtgen prizma ve farklı yapılarda birim küp sayısını hesaplamayı yapılandırdıkları bir kez daha görülmüştür. Öğrenciler, birim küp sayısını hesaplamada *etkili bir çözüm* sunan kat ve sıra stratejileri etrafında *mutabık olmuşlardır*.

Yedinci ve sekizinci hafta dikdörtgen prizmalarda hacim ölçme bağıntıları oluşturma amaçlanmıştır. Yedinci hafta etkinliğinde öğrencilerin günlük yaşamda aşina oldukları birim küp şeklinde sabun kalıplarından oluşturulmuş bir dikdörtgen prizma üzerine bir senaryo hazırlanmıştır. Küçük grup ve sınıf tartışmalarında öğrenciler birim küplerle oluşturulmuş dikdörtgen prizmanın hacmini öncelikle Şekil 3'te görüldüğü gibi hacim ölçme bağıntısı kullanmadan kat ve sıra stratejilerini kullanarak hesaplamışlardır. Daha sonra ise öğrencilerden somut birim küplerden yararlanarak ve yapılandırdıkları bilgileri kullanarak dikdörtgen prizmalar için hacim ölçme bağıntıları keşfetmeleri istenmiştir. Tablo 9'da görüldüğü gibi, etkinlikte küçük grup tartışması sırasında ilk olarak Emre "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısını keşfetmiştir. Emre bununla ilgili grup arkadaşlarına "Sabun kalıplarının sayısını hesaplamanın kolay bir yolu var. Bir sırada 2 tane sabun kalıbı var 4 de sıra var 4 kere 2, 8 eder. Birinci katta 8 tane var, yükseklik de 3 olduğu için 8 ile 3'ü çarparız. 24 olur." şeklinde *kabul edilebilir bir matematiksel açıklama ile öğrencilere kolay gelen etkili bir çözümde* bulunmuştur. Murat ise "Yükseklik x Genişlik x Uzunluk" şeklinde *farklı bir matematiksel çözümle* hacim ölçme bağıntısını oluşturmuş ve bu bağıntıyı oluştururken de birim küpleri Şekil 3'te görüldüğü gibi yan taraftan ayırarak sayma stratejisini kullanmıştır. Bu bağıntıların keşfinden sonra, Emre bu kez birim küpleri ön sıradan arkaya doğru sayarak "Yükseklik x Uzunluk x Genişlik" bağıntısını keşfetmiştir. Murat'ın oluşturduğu bağıntıda yaptığı *matematiksel açıklama ve çözümlerinin* Emre'nin zihninde çağrışım yarattığı ve Emre'nin bağıntıyı bu şekilde keşfetmesine destek sağladığı gözlenmiştir. Çünkü Emre, Murat'ın "Yükseklik x Genişlik x Uzunluk" bağıntısını keşfinden sonra "O zaman şöyle de olur. Önce uzunlukla yüksekliği çarparız 4 kere 3, 12 sonra da bulduğumuz sonucu genişlikle çarparız, 12 kere 2, 24 olur bu da olur." şeklinde *kabul edilebilir bir matematiksel açıklama ve* *çözümle* ile bu bağıntıyı keşfetmiştir. Odak öğrenciler, bu bağıntılardaki uzunluk ile genişlik çarpımının birinci kattaki birim küp sayısını, genişlik ile yükseklik çarpımının yan tarafın son sırasındaki birim küp sayısını, yükseklik ile uzunluk çarpımının ön sıradaki birim küp sayısını oluşturduğunu fark etmişlerdir.

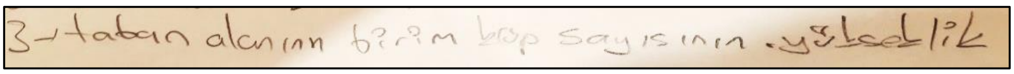
Şekil 3. Yedinci Hafta Küçük Grup Tartışmasında Öğrencilerin Birim Küplerle Oluşturdukları Dikdörtgen Prizma Üzerinde Hacim Ölçme Bağıntılarını Keşfetme Eylemleri

Tablo 9'da görüldüğü gibi, benzer biçimde sınıf tartışmalarında genel olarak öğrenciler, "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısını ve bu bağıntıda boyutların farklı sıralarla çarpılarak oluşturulan bağıntıları keşfetmişlerdir. Ancak öğrenciler genel olarak bağıntıları oluştururken boyutları uzunluktan ziyade birim küp sayıları ile özdeşleştirmişlerdir. Öğrenciler süreç içerisinde üç boyuttan (örneğin "uzunluk 4 birim küp") bir boyuta (örneğin "uzunluk 4 birim") geçiş yaparak bağıntıyı daha doğru yapılandırmışlardır. Bu süreçte sınıfta başka bir grubun öğrencileri Şekil 4'te görüldüğü gibi "Uzunluk x Genişlik = Birinci katın alanı ve Birinci katın alanı x Yükseklik" biçiminde farklı bir hacim ölçme bağıntısı oluşturmuşlardır. Bu grubun öğrencileri taban alanını taban yüzündeki birim karelerden ziyade birinci kattaki birim küp sayısı ile ilişkilendirmişlerdir. Bu düşünce benzer biçimde Murat başta olmak üzere birkaç öğrenci dışında diğer öğrencilerde de görülmüştür. Dolayısıyla sınıf tartışmalarında genel olarak öğrenciler, üç boyuttan iki boyuta geçiş yapmakta, bu nedenle de "Taban alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısını doğru yapılandıramamışlardır. Öğrencilerin yaşadıkları bu zorluğu aşmak için Şekil 4'te görüldüğü gibi öğretmen, birim küplerle oluşturulmuş dikdörtgen prizmanın görsel ve somut temsillerini kullanmasına karşın bu güçlük aşılamamıştır.



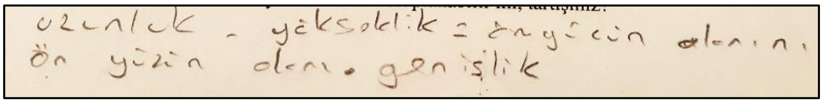
Şekil 4. Sınıf Tartışmasında Bir Grubun Keşfettiği Hacim Ölçme Bağıntısı ve Öğretmenin Bu Bağıntıda Yaşanan Zorluklara Yönelik Eylemleri

Sekizinci hafta etkinliklerinde aynı amaca yönelik bu kez birim küplerle boyutları inşa edilmiş kare prizma ve yüzleri birim karelerle kaplanmış boş bir dikdörtgen prizma biçiminde kutu üzerine iki senaryo hazırlanmıştır. Tablo 9'da görüldüğü gibi, etkinliklerde küçük grup tartışmalarında odak öğrenciler, "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" bağıntısını, bu bağıntının farklı oluşturulma biçimlerini ve "Birinci kattaki birim küp sayısı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntılarını yapılandırdıkları görülmüştür. Bununla birlikte "Taban alanı x Yükseklik" bağıntısını yapılandırmada dolayısıyla da üç boyuttan iki boyuta geçiş yapmakta Murat dışındaki odak öğrencilerde bu güçlük devam etmiştir. Ali ve Emre, "Taban alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısında taban alanını yine birinci kattaki birim küp sayısı ile ilişkilendirmiş ve çalışma kâğıdına Şekil 5'te görüldüğü gibi yansıtmışlardır.



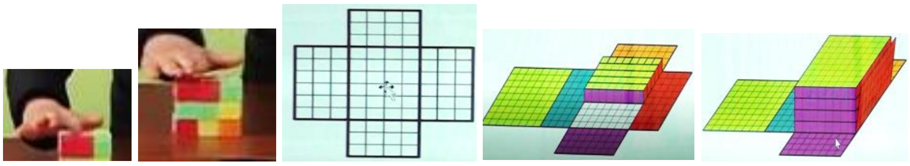
Şekil 5. Ali ve Emre'nin Çalışma Kâğıdına Yansıttıkları Hacim Ölçme Bağıntısı

Öte yandan Murat, "Taban alanı x Yükseklik" bağıntısını yapılandırdığından dolayı Şekil 6'da görüldüğü gibi "Ön yüzün alanı x Genişlik" şeklinde farklı bir hacim ölçme bağıntısı oluşturmuş ve sınıf tartışmasına yansıtmıştır. Murat, bu bağıntıyı yüzleri birim karelerle kaplı olan dikdörtgen prizma biçiminde kutu üzerinde keşfetmiştir.



Şekil 6. Murat'ın Keşfettiği Hacim Ölçme Bağıntısı

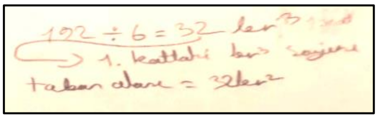
Tablo 9'da görüldüğü gibi, sınıf tartışmalarında da benzer biçimde genel olarak öğrencilerin "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" bağıntısının farklı biçimlerini ve "Birinci kattaki birim küp sayısı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntılarını yapılandırdıkları bir kez daha görülmüştür. Ancak öğrenciler, "Birinci kattaki birim küp sayısı x Yükseklik" bağıntısının prizmaların birim küple doldurulması durumunda geçerli olabileceğini, sıvı gibi herhangi farklı bir şeyle doldurulması durumunda kullanılmayacağını, diğer bağıntıların ise her durumda kullanılabileceğini vurgulamışlardır. Dolayısıyla öğrencilerin beşinci hafta etkinliğinde prizma sıvı ile doldurulduğunda "Sıvının hacmi bilinmezse hacim hesaplanamaz." şeklindeki düşüncelerinin sınıfta gerçekleştirilen tartışmalarla değişim gösterdiği görülmüştür. Bununla birlikte küçük grup tartışmaları sürecinde öğrencilerin birçoğunda "Taban alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısında yaşanan güçlük de devam etmiştir. Öğretmen bu kez farklı etkinlikler üzerinde Şekil 7'de görüldüğü gibi teknoloji destekli görsel ve somut temsiller kullanmanın yanında öğrencilerin "Taban" sözcüğünün öğrencilere prizmaların birinci katmanını çağrıştırdığını fark etmiş, bu nedenle de "Taban alanı" ifadesi yerine "Taban yüzeyinin alanı" ifadesini kullanmaya başlamıştır.



Şekil 7. Öğretmenin Sınıf Tartışmasında Zorluğu Aşmaya Yönelik Uygulamaları

İlerleyen süreç içerisinde bu farklı etkinliklerde "yüzey, kat, taban ve taban alanı" üzerine öğretmenin başlattığı tartışmalar sonucu ortaya konan *fikirlerini ve matematiksel çözümlerini açıklama ve gerekçelendirme, birbirlerine karşı çıkma ya da mutabık olma, sorgulama yapma* normlarının desteğiyle öğrenciler, genel olarak bu güçlüğü aşmışlardır. Öğrenciler, yapılandırdıkları bu bağıntıları, günlüklerine de yansıtmışlardır. Ayrıca keşfedilen bu bağıntıların küp ve kare prizma dâhil olmak üzere tüm dikdörtgen prizmalarda geçerli olduğu öğrenciler tarafından görsel ve birim küplerle oluşturulmuş somut temsiller üzerinde ortaya konmuştur.

Dokuzuncu hafta etkinliğinde öğrencilere oluşturulan hacim ölçme bağıntılarını kullanabilecekleri altı tane günlük yaşam problemi hazırlanmıştır. Tablo 9'da görüldüğü gibi, etkinlikte küçük grup ve sınıf tartışmalarında genel olarak odak ve diğer öğrenciler, "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik, "Birinci kattaki birim küp sayısı x Yükseklik" ve "Taban yüzeyinin alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntılarını yapılandırdıkları ve bu bağıntıları günlük yaşam problemleri bağlamında kullanabildikleri görülmüştür. Dolayısıyla öğrenciler, üç boyuttan iki boyuta geçiş yapmakta yaşadıkları güçlüğü aşma yönünde güçlü belirtiler göstermişlerdir. Bu süreçte küçük grup tartışmasında Murat, Ali ve Emre'yi taban yüzeyinin alanına ilişkin sorularda "Taban alanı neresidir?" şeklinde *sorgulamış* ve taban yüzeyini göstermelerini istemiştir. Ali ve Emre de sıklıkla yüzeyi gösterip yüzey alanını birim küplerden ziyade birim karelerle ilişkilendirmişlerdir. Odak öğrencilerin grup ve sınıf tartışmaları sürecinde *fikirlerini ve matematiksel çözümlerini açıklama ve gerekçelendirme, birbirlerine karşı çıkma ya da mutabık olma, birbirlerini sorgulama* normlarını sıklıkla sergiledikleri gözlenmiştir. Bu etkinlikte küpün bir ayrıtının iki katına çıkarılması durumunda hacminin kaç katına çıkacağına ilişkin problemde Murat, sınıf tartışmasında önce bir birim küp almış ve sonrasında birim küpleri yan yana ve üst üste koyarak her ayrıtı iki katına çıkacak şekilde bir ayrıtı iki birim olan küp oluşturmayı düşünmüştür. Daha sonra her katta dört tane olmak üzere iki katlı sekiz tane birim küpe ihtiyaç olduğunu dolayısıyla da hacmin sekiz katına çıkacağını ifade etmiştir. Bununla birlikte Murat'ın küçük grup ve sınıf tartışmalarında hacmi 192 birim küp ve yüksekliği 6 birim verilen problemde "Yüksekliği 6 birim vermişse bu 6 katlıdır. Bir kattaki birim küp sayısını bulmak için 192 'yi kat sayısına yani 6'ya böleriz birinci katta 32 birim küp olur. Bize taban yüzeyinin alanını sormuş, birinci katın alt yüzeyi taban alanını verir. Taban alanı için yüzeye bakılır, yüzeyi de birim kare ile ölçeriz. Bu yüzden cevap 32 birim kare olur." şeklinde *kabul edilebilir bir matematiksel açıklama ile etkili bir çözümde* bulunmuş ve çalışma kâğıdına Şekil 8'de görüldüğü gibi yansıtmıştır. Murat ve diğer öğrencilerin bu şekilde yaptığı *kabul edilebilir matematiksel açıklamaların ve etkili çözümlerin* öğrencilerin özellikle "Taban alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısını daha anlamlı yapılandırmalarına destek sağlamıştır.



Şekil 8. Murat'ın Problem Çözüm Süreci

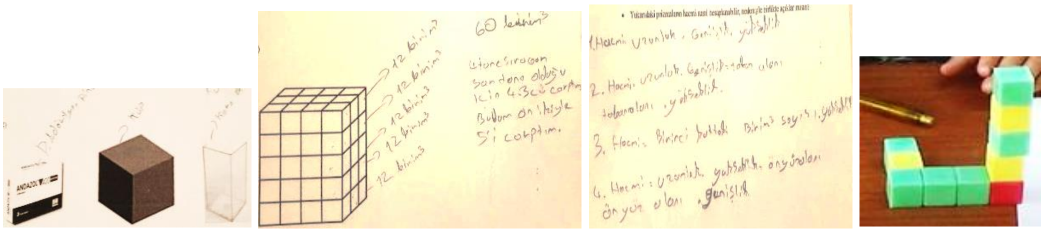
Son Klinik Görüşmeler

Beş haftalık üçüncü etap öğretim dizisinden sonra gerçekleştirilen son klinik görüşmelerde öğrencilerin sergiledikleri fiziksel-zihinsel eylemlere ilişkin bulgular, dikdörtgen prizmaların hacmini ölçme ana teması altında Tablo 10'da sunulmuştur.

Tablo 10. Son klinik Görüşmelerde Odak Öğrencilerin Sergiledikleri Fiziksel-Zihinsel Eylemler

Dikdörtgen Prizmaların Hacmini Ölçme
✓ *Hacim ölçme bağıntıları*
-Kat ve sıra stratejisi kullanarak hesaplama (A, E, M)
-Uzunluk x Genişlik x Yükseklik (A, E, M)
-Birinci kattaki birim küp sayısı x Yükseklik (A, E, M)
-Taban alanı x Yükseklik (A, E, M)
-Önyüzün alanı x Genişlik bağıntılarını kullanarak hesaplama (A, M)

Tablo 10'da görüldüğü gibi, son klinik görüşmelerde Ali ve Murat küçük grup ve sınıf tartışmalarında keşfedilen tüm hacim ölçme bağıntılarını yansıtırken, Emre Murat'ın keşfettiği "Ön yüzün alanı x Genişlik" bağıntısı dışındaki tüm bağıntıları yansıtmıştır. Öğrenciler hacim ölçme bağıntılarını görsel ve inşa ettikleri somut temsiller üzerinde kat ve sıra stratejilerini kullanarak açıklamışlardır. Son klinik görüşmeler esnasında bağıntılara ilişkin gerekçelerini açıklamak için Ali Şekil 9'da görüldüğü gibi dikdörtgen prizmanın boyutlarını inşa etmiştir.



Şekil 9. Ali'nin Dikdörtgen Prizmanın Boyutlarına İlişkin Fiziksel/Zihinsel Eylemleri

Bununla ilgili düşük başarı düzeyine sahip öğrenci olan Ali'nin ortaya koyduğu fiziksel/zihinsel eylemlere ilişkin açıklamaları aşağıda örnek olarak verilmiştir.

Araştırmacı: Dikdörtgen prizma, küp ve kare prizma olarak adlandırdığın bu prizmaların hacimlerini nasıl hesaplarsın?

Ali: Uzunlukla genişliği çarparım sonra da bulduğum sonuçla yüksekliği çarparım

Araştırmacı: Neden, nasıl açıklıyorsun bu formülü?

Ali: Bu prizmaları birim küplerle doldurursak mesela bu resimde yaptığı gibi bir sırada 3 tane birim küp var 4 de sıra var her bir sırada 3 tane olduğu için uzunlukla genişliği çarparım 12, her katta aynı sayıda olduğu için bulduğum sonuçla da yüksekliği yani 5 birimi çarparım. 60 birim küp olur.

Araştırmacı: Niye yükseklikle çarptın?

Ali: Yükseklikle kat sayısı olduğu için çarptım (Yukarıda görselde görüldüğü birim küple oluşturulmuş yapıda hacmi kat ve sıra stratejilerini kullanarak hesapladı ve birim küplerle yapının boyutlarını inşa ederek bağıntıyı açıkladı).

Araştırmacı: Başka nasıl hesaplanabilir?

Ali: Uzunlukla genişliği çarparız taban alanını bulurum. Taban alanıyla da yüksekliği çarparım.

Araştırmacı: Nasıl olur açıklar mısın?

Ali: Burada mesela uzunlukla genişliği çarparız birinci kattaki birim küp sayısını buluruz, mesela burada yaptığım gibi 12 birim küp, birinci katın altı yüzeyi de 12 birim kare olur sonra da yükseklik kat sayısı olduğu için yükseklikle çarparız yine 60 birim küp olur. (Görsel resimdeki dikdörtgen prizmanın tabanını somut model ve birim küplerle oluşturulmuş dikdörtgen prizma görsel temsili üzerinde gösterdi ve bağıntıyı açıkladı).

Araştırmacı: Başka yol var mı?

Ali: Var bu prizmalar birim küple doldurulursa birinci kattaki birim küp sayısı ile yüksekliği çarparız, hacmi buluruz mesela yine bu resimde birinci katta 12 tane var yükseklikle kat sayısıyla 5'le çarparsak yine hacmi 60 birim küp olur. Çünkü her katta aynı sayıda birim küp olur.

Araştırmacı: Birim küple doldurulmazsa eğer.

Ali: O zaman bu formül olmaz.

Araştırmacı: Başka bildiğin var mı?

Ali: Başka bir de uzunlukla yüksekliği çarparız ön yüzün alanını buluruz sonra da genişlikle çarparız yine aynı sonucu verir mesela burada uzunluk 4 birim, yükseklik 5 birim çarparsak ön yüzün alanı 20 birim kare olur sonra da genişlik 3 birimle çarparsak 60 birim küp olur. (Dikdörtgen prizma modeli üzerinde uzunluk, yükseklik ve ön yüzü gösterdi, bağıntıyı açıkladı ve tüm hacim ölçme bağıntılarını çalışma kâğıdına yansıttı).

Sonuç olarak, süreç sonunda üç odak öğrenci dikdörtgen prizmaların hacim ölçme bağıntılarını yapılandırabilmiş ve bağıntıları nasıl yapılandırdıklarını birbirine benzer biçimde açıklamalarla gerekçelendirebilmişlerdir.

Sonuç ve Tartışma

Öğretim Deneyi Sürecine Yönelik Sonuç ve Tartışmalar

Bir konuya ilişkin ön bilgiler, öğrenme sürecinde o konuyla ilgili yeni bilginin oluşturulmasında önemli bir faktör olarak değerlendirilebilir. Öğretim aracı olan TÖYH'de de öğrenme amacı belirlenirken öğrencilerin ön bilgileri dikkate alınmaktadır (Simon, 1995). Bu bağlamda üç odak öğrencinin ön bilgilerinin belirlenmesi amacıyla gerçekleştirilen ön klinik görüşmeler sonucunda iki ve üç boyutlu nesneleri ayırt etme ve ilişkilendirme, prizmaların tabanlarını, boyutlarını belirleme, birim küplü yapılarda sayma ve yapıları oluşturma konularında öğrenciler arasında birbirine benzer ya da birbirinden farklılık gösteren güçlükler gözlenmiştir. Özellikle Ali'de çok daha fazla gözlenen bu güçlükler, uzamsal becerisinin zayıf olabileceğini düşündürmüştür. Nitekim uzamsal becerinin ilişkileri görsel olarak anlama, kullanabilme, yeniden düzenleyebilme ve yorumlama ile ilişkili olan zihinsel beceriler olarak tanımlanması (Tartre, 1990) bu düşünceyi desteklemektedir. Uzamsal ve geometrik düşünme gelişiminde somut modellerin önemli araçlar olduğu belirtilmektedir (Clements ve McMillen, 1996). Dolayısıyla bu öğrencinin sınıf içi uygulamalarda somut modellerle etkileşiminin az olması ya da genlük yaşamda kullanılan nesnelere uzak kalması bu durumlara yol açmış olabilir. Dolayısıyla öğretim etkinliklerinin hazırlanmasında bu durum dikkate alınmış ve sınıf içi uygulamalarda somut, görsel, günlük yaşam gibi temsiller sıklıkla kullanılmıştır. Diğer yandan öğrencilerin birim küpü "küçük" olarak algılamaları, somut nesnelerin dikkatli kullanılması gerektiğini ortaya koymaktadır. Öğrencilerin birim küpü "küçük" olarak yapılandırmaları, sınıf ortamlarında birim küpü temsil eden somut nesne modellerinin kullanılmalarından kaynaklanmış olabileceğini akla getirmiştir. Prizmaların tabanlarını ve boyutlarını belirlemede yaşanılan güçlüklerin nedeni olarak ise Türkiye'de dile yerleşmiş örneğin "bir odanın tabanı ve tavanı" ve yanlış algıya yol açabilecek "bir insanın boy uzunluğu" gibi kavramların kullanılması olarak görülebilir. Nitekim alan yazında öğretmen adayı ya da öğretmenler üzerinde yapılan çalışmalarda dahi burada elde edilen sonuçlara paralel sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin Gökkurt ve Soylu (2016), ortaokul matematik öğretmenlerinin prizma kavramını tanımlamada ve temel elemanlarını belirlemede güçlük yaşadıklarını ortaya koymuşlardır. Bozkurt ve Koç (2012) ise, öğretmen adaylarının prizmayı tanımlamada matematik dilini yeterince kullanamadıklarını dolayısıyla prizmaları tanımlamada zorlandıklarını vurgulamışlardır.

Birim küplü yapılarda sayma ve yapıları oluşturma konularında Ali kadar olmamakla birlikte Emre ve Murat da çeşitli araştırma bulgularına paralel (Hirstein, 1981; Ben-Chaim vd., 1985; Olkun, 2003) güçlükler yaşamış ve birtakım hatalar yapmışlardır. Öğrenciler, kendilerini doğru sonuca götüren ve yapıdan yapıya farklılık göstermeyen tutarlı stratejileri kullanmaktan ziyade alan yazındaki bazı araştırma bulgularında (Battista ve Clements, 1996; Olkun, 1999) belirtildiği gibi yapıların basit ya da karmaşık olmasına göre farklı stratejiler kullanmışlardır. Bu durum öğrencilerin birim küplerle oluşturulmuş yapılar ile deneyimlerinin yetersiz olmasından kaynaklanmış olabileceğini düşündürmüştür. Bununla birlikte Olkun'un (1999) vurguladığı gibi karmaşık yapılarda üç boyutluluğu ve yapısal düzenliliği algılama konusundaki güçlükler de bu duruma yol açmış olabilir.

Araştırma bulgularından elde edilen temel sonuçlardan biri, üç odak öğrencinin de birinci ve ikinci etap öğretim dizilerinde ön klinik görüşmelerde yaşadıkları güçlükleri aşmış olmalarıdır. Nitekim öğretim sürecinde dördüncü hafta etkinliğinde küçük grup tartışması sürecinde grup üyeleri *birbirleriyle tartışarak ve birbirlerini sorgulayarak* dikdörtgen prizmayı birim küplerle oluştururken öğrencilerin önce boyutları inşa etmeleri sonrasında kalan kısımları tamamlamaları bu durumu destekleyen önemli bir bulgu olarak göze çarpmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin birim küpleri kullanarak oluşturdukları dikdörtgen prizmada birim küp sayısını hesaplarken "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" *matematiksel çözüm stratejisini* keşfedip kullanmaları öğrencilerin üç boyut algılarının geliştiği ve bu yapılara dönük uzamsal düşünebildiklerini destekleyen dikkate değer bir bulgu olarak değerlendirilebilir. Ancak "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" çözüm stratejisi, odak öğrencilerin grup ve sınıf tartışmaları sırasında "bir dikdörtgen prizma sıvı ile doldurulduğunda sıvının hacmi bilinmediğinde prizmanın hacminin hesaplanamayacağı" şeklindeki görüşleri stratejinin bu süreçte hacim ölçme bağıntısı olarak yapılandırılmadığına işaret etmiştir. Nitekim Battista ve Clements (1996), hacim yapısının öncelikli olarak doğrudan verilen formüllerle anlamlandırılmasının öğrenciler için güçlük yarattığını ve bunun ezberden başka bir şey ifade etmeyeceğini belirtmişlerdir. Benzer şekilde Zembat (2009) da "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" bağıntısının ardındaki ilkelerin iyi kavranmadan bağıntının ezbere dayalı geliştirilerek kullanılmasının öğrencilerin matematiksel yapıdan kopmalarına neden olduğunu iddia etmiştir. Bu nedenle Battista (2007), hacim kavramının öğretiminde matematiksel kavramların anlamlandırılması ve içselleştirilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Bu bağlamda Olkun (2003), öğrencilerin hacim ölçme ile ilgili temel kavramları kendilerinin oluşturabilmesine ve formülleri-kuralları kendilerinin keşfetmesine imkân sağlayacak etkinliklerle matematik öğretiminin gerçekleştirilmesi gerektiğini önermiştir. Zembat (2007) ise, bu doğrultuda öğretim derslerinin öğrencilerin derin soyutlama yapabilecekleri şekilde tasarlanması gerektiğini belirtmiştir. Bu araştırmanın sonuçlarından biri de alan yazındaki bu araştırma bulguları ve önerileri dikkate alınarak tasarlanan üçüncü etap öğretim dizisi etkinliklerinin Simon ve Tzur'un (2004) vurguladığı gibi, matematik öğretiminde ve öğreniminde anahtar bir rol oynamasıdır. Matematiksel etkinlikler, öğrencilerin kendilerinin hacim ölçme bağıntıları oluşturabilmelerine ve derin soyutlama yapabilmeleri hipotezine yönelik olarak yürütülen öğretim sürecinde değerli araçlar sunduğu söylenebilir. Bu doğrultuda hacim ölçümlerinde ölçüm sonucunu belirlemenin en kolay yolu Cavalier prensibiyle ortaya konmuştur. Cavalier Prensibinin özünde cisimlerin hacimlerinin o cisimleri katmanlara ayırarak belirlenebileceği gerçeği yatmaktadır (Zembat, 2009). Bu bakış açısıyla tasarlanan yedinci hafta etkinliğinde küçük grup tartışmasında ön görüldüğü gibi Emre tarafından ilk olarak "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısı keşfedilmiştir. Emre, bu bağıntıyı oluştururken genel olarak sınıftaki diğer öğrencilerin düşündüğü gibi birim küpleri en alt kattan başlayarak sayma stratejisini kullanmıştır. Murat ise birim küpleri yan taraftan sayma stratejisini kullanarak "Yükseklik x Genişlik x Uzunluk" hacim ölçme bağıntısını keşfetmiştir. Öğrencilerin birçoğu alttan başlayarak birim küpleri sayma eğilimi gösterirken, Murat'ın birim küpleri yan taraftan sayma eğilimi göstererek bağıntıyı farklı bir biçimde ifade etmesi gerçekten dikkat çekicidir. Grubun birim küpler kullanarak inşa ettiği dikdörtgen prizmanın somut temsili üzerinde Murat'ın yan taraftaki birim küpleri açık bir biçimde önünde görmesi sonucu yapıyla kurmuş olduğu *zihinsel eylemlerinin* bu bağıntının keşfedilmesine katkı sağladığını söylenebilir. Bu iki bağıntının keşfinden hemen sonra, Emre de "Yükseklik x Uzunluk x Genişlik" bağıntısını keşfetmiştir. Emre, bu bağıntıyı keşfederken bu kez birim küpleri ön sıradan arkaya doğru saymıştır. Murat'ın oluşturduğu bağıntının Emre'nin *zihinsel eylemlerini* harekete geçirerek bu bağıntıyı keşfetmesine zemin hazırladığı söylenebilir. Genel olarak odak öğrencilerin bu bağıntıları keşfetmeden önce grup olarak birim küplerle oluşturulmuş dikdörtgen prizmanın hacmini kat ve sıra stratejileri ile görsel temsil üzerinde hesaplama ve somut temsilini birim küplerle inşa etme deneyimleri ve somut temsiller üzerinde *aralarında gerçekleştirdikleri tartışmalar*, öğrencilerin bu bağıntıları keşfetmelerine ve yapılandırmalarına yardımcı olduğu söylenebilir. Bu süreçte başka bir grubun öğrencilerinin keşfettiği "Uzunluk x Genişlik = Birinci katın alanı ve Birinci katın alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısı dikkat çekmiştir. Öğrencilerin genel olarak taban alanını taban yüzündeki birim karelerden ziyade birinci kattaki birim küp sayısı ile ilişkilendirmeleri dikkate değer çok önemli bir araştırma bulgusu olarak göze çarpmış ve öne çıkmıştır. Ancak "Taban alanı x Yükseklik" bağıntısını zihninde doğru yapılandırılan Murat, bu bağıntıdan elde ettiği *zihinsel bilgiyi* kullanarak sekizinci hafta küçük grup tartışmasında "Ön yüzün alanı x Genişlik" şeklinde ders kitaplarında dahi değinilmeyen çarpıcı daha farklı bir hacim ölçme bağıntısı keşfetmiştir. Bununla birlikte dokuzuncu hafta etkinliğinde küpün bir ayrıtının iki katına çıkarılması durumunda hacminin kaç katına çıkacağına ilişkin problemde de Murat'ın birim küpleri yan yana ve üst üste koyarak yaptığı *farklı matematiksel çözüm stratejisi* çok dikkati çekmiştir. Murat'ın bu stratejisi uzamsal becerilerinin gelişmiş olduğunu ve hacim ölçmeyi derin düzeyde soyutladığını destekler nitelikte olduğu söylenebilir. Ayrıca Murat'ın küçük grup ve sınıf tartışmalarında hacmi 192 birim küp ve yüksekliği 6 birim verilen problemde taban alanını hesaplama konusundaki *kabul edilebilir matematiksel açıklama ve çözümleri,* önemli bir bulgu olarak göze çarpmıştır. Bu durum Murat'ın dikdörtgen prizmaların hacmini yapılandırdığının başka bir göstergesidir. Aynı zamanda bu tip etkili bir çözümün "Taban alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısını yapılandırmada destek sunduğu söylenebilir.

Bu araştırmanın sonuçlarından bir diğeri de üçüncü etap öğretim dizisinden sonra gerçekleştirilen son klinik görüşmeler sonucunda alan yazında önemi vurgulandığı gibi odak öğrencilerin hacim ölçme bağıntılarını nasıl yapılandırdıklarını gerekçeleri ile açıklayabilmeleridir. Cavalier prensibine göre "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" ve "Taban Alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntılarında tekrarlayan şey taban alanı değil taban tabakasının hacmidir (Zembat, 2009). Nitekim üç öğrenci de son klinik görüşmede taban yüzeyinin alanı ile her bir katmandaki birim küp sayısı arasındaki ayrımı yaparak bu bağıntıların mantığını kavradıklarını göstermişlerdir. Öte yandan son klinik görüşmeler sırasında Ali hacim ölçme bağıntılarıyla ilgili gerekçelerini açıklamak için dikdörtgen prizmanın boyutlarını oluşturmuştur. Ali'nin dikkati çeken bu eylemi, süreçte dikdörtgen prizmalara yönelik uzamsal becerisinin gelişim kaydettiğinin bir göstergesi olduğunu düşündürmüştür.

Sonuç olarak bu araştırmada dikdörtgen prizmaları tanımaya, prizmaların temel özelliklerine, birim küplerle oluşturulmuş yapılara ve dikdörtgen prizmaların hacmine ilişkin önemli olduğu düşünülen bulgular elde edilmiştir. Bu durum araştırmanın özgünlüğünü ortaya koymakla birlikte bu bulguların hem derslerde öğretim gerçekleştiren öğretmenlere kullanışlı pratik bilgiler sağlayacağı hem de alan yazında bu konulara yönelik yürütülecek çalışmalara önemli katkılar sağlayabileceği söylenebilir.

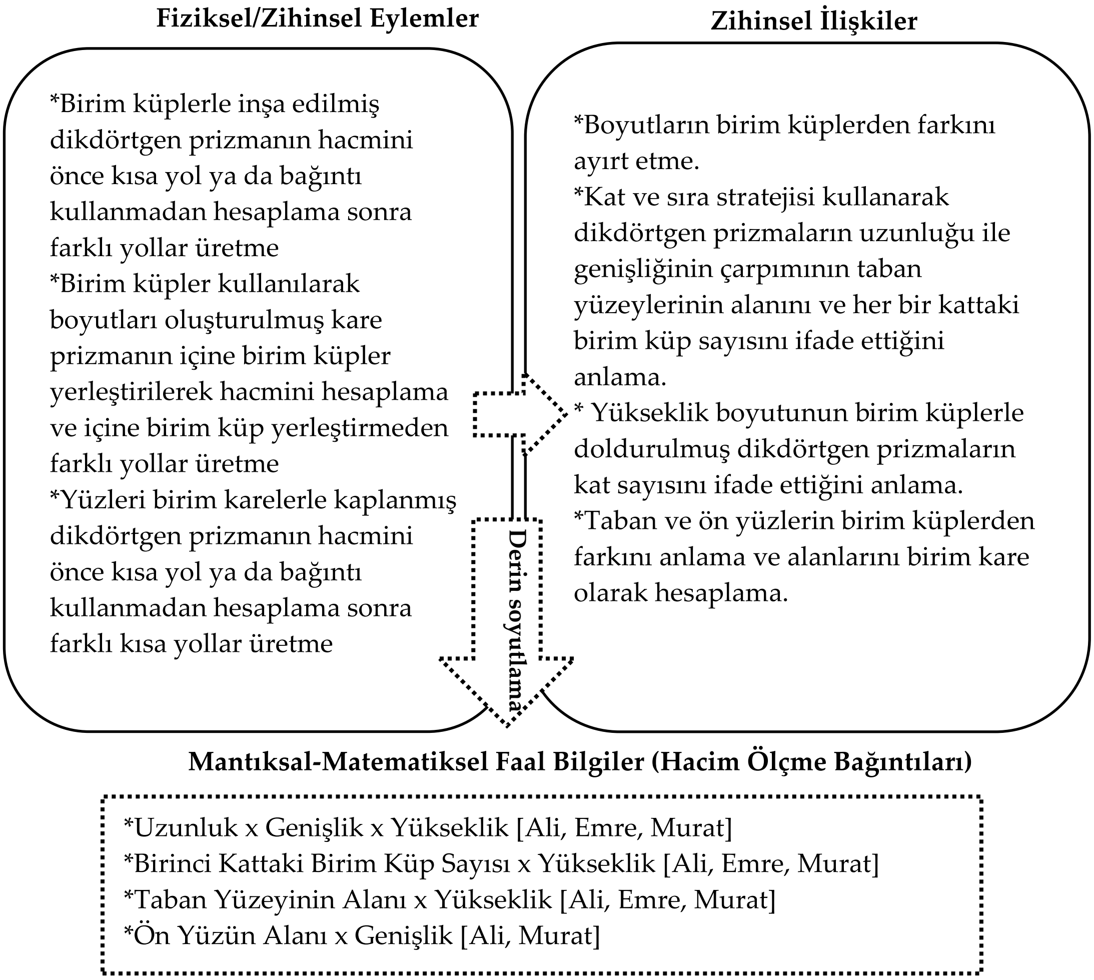
Odak Öğrencilerin Matematiksel Soyutlamalarına Yönelik Sonuç ve Tartışmalar

Öğrencilerin dikdörtgen prizmalarda hacim ölçmeye ilişkin soyutlama mekanizmalarının ortaya konulmasında Gallagher ve Reid (1981) tarafından vurgulanan Piaget'in öğrenme ilkeleri göz önünde bulundurulmuştur. Bu bağlamda Piaget'nin ilk olarak öğrenme için yeterliği ön şart olarak kabul ettiği ilkesinden hareketle ön klinik görüşmeler yapılarak bu noktalardaki yeterlikler ve eksiklikler belirlenmiştir. Öğrencilerde tespit edilen eksikliklerden dolayı TÖYH çerçevesinde buna yönelik ders planları hazırlanarak öğrencilerin bu konularda yeterliklerinin sağlanmasına çalışılmıştır.

Piaget, öğrenmenin içsel bir yapılandırma süreci olduğunu iddia etmektedir. Bu düşünceden hareketle hacim ölçme bağıntılarına yönelik etkinlikler, içsel sürecin ilerleyişi dikkate alınarak tasarlanmaya çalışılmıştır. Bireyin kendi içsel yapılandırması sonucu oluşturduğu faal bilgiler, Piaget'e göre bireyin öğrenme mekanizmasının çalışması ile oluşturulan bilişsel yapılardan meydana gelmektedir. Bu bağlamda sınıf tabanlı öğretim etkinlikleri sonucunda odak öğrencilerin bilişsel yapılarından oluşan faal bilgileri son klinik görüşmeler sonucunda ortaya konulmuştur.

Piaget, öğrenmenin çelişkiler, sorgulamalar ve bu durumlar sonucunda zihinde yapılan yeni düzenlemeler sayesinde gerçekleştiğini vurgulamıştır. Zihinde yapılan yeni düzenlemeleri ise genellikle sosyal etkileşim harekete geçirmektedir. Başka bir deyişle Piaget, sosyal etkileşimin de öğrenmede önemli bir etken olduğunu belirtmekle beraber öğrenmenin bilişsel boyutuna daha fazla odaklanmıştır. Bu çalışmada ise odak öğrencilerin bilgiyi matematiksel olarak nasıl soyutladıklarına odaklanmakla birlikte süreçte soyutlamayı destekleyici olan sosyal faktörlere de odaklanılmıştır. Nitekim alan yazındaki birçok araştırmada da (Bauersfeld, 1980; Cobb ve Yackel, 1996; Cobb, vd., 1997; Yackel vd., 1991, 1993; Yackel & Cobb, 1996) sınıf sosyal etkileşimlerinin öğrenmeyi desteklediği vurgulanmıştır. Bu doğrultuda araştırmada öğretim dizileri boyunca öğrencilerin birbirleriyle ve öğretmen ile rahat etkileşimde bulunabilecekleri bir ortam oluşturulmuştur. Araştırmanın bulgular kısmında ortaya konulduğu gibi, bu süreçte öğrenciler *birbirlerini dinleme*, *anlamaya çalışma ve sorgulama*, *fikirlerini ve çözümlerini açıklama ve gerekçelendirme*, *mutabık ya da karşı olma*, *kabul edilebilir matematiksel açıklama ve gerekçelendirmede bulunma* ve *matematiksel çözümler yapma* gibi benimsedikleri gözlenen çeşitli sosyal ve sosyomatematiksel normları sık sık kullanmışlardır. Odak grup öğrencileri Ali, Emre ve Murat, küçük grup tartışmalarında sıklıkla birbirlerinden *fikirlerini açıklamalarını, matematiksel çözümler yapmalarını* ve yaptıkları *çözümleri gerekçelendirmelerini* istemişlerdir. Özellikle bu süreçte Emre ve Murat'ın Ali'yi "Sen ne düşünüyorsun?", "Çözümün nedir? Açıklar mısın?", "Bizim çözümlerimizi anladın mı?", "Bizim çözümlerimize katılıyor musun?" şeklindeki sorgulamalarının Ali'nin gelişimine destek sağladığı söylenebilir. Ali'nin akranlarıyla bu tür bir etkileşimi Piaget'in de vurguladığı gibi bilişsel ve sosyal gelişimde kritik bir unsur oluşturmuştur. Nitekim Smith ve diğerleri (2009), akranların birbirleriyle tartışmalarının anlamayı arttırdığını ve öğrenci performanslarını olumlu yönde desteklediğini ortaya koymuşlardır. Benzer şekilde sınıf tartışmasında da öğretmen-öğrenci etkileşimleri sağlanmış ve öğretmen yönlendirici bir rol oynayarak tüm öğrencilerden sıklıkla *düşüncelerini açıklamalarını, matematiksel çözümler üretmelerini, ürettikleri çözümleri gerekçelendirmelerini, anlamadıkları noktaları dile getirmelerini, birbirlerini sorgulamalarını, arkadaşları ile mutabık olmadıkları durumlarda birbirlerine karşı çıkmalarını* istemiştir. Öğretim sürecinde Ali başta olmak üzere odak öğrenciler, giderek artan bir düzeyde etkinliklere katılım göstererek önemli bir gelişim kaydetmişlerdir. Odak öğrencilerin matematiksel soyutlamalarında kendi bireysel zihinsel eylemlerinin yanı sıra sınıf uygulamalarında sergilenen bu normların destekleyici bir rolü olmuştur. Nitekim alan yazında birçok araştırmada da bu araştırma bulgularına paralel olarak (Cobb, 1989, 1990; Cobb, vd., 1991; Cobb ve Yackel, 1996; Wood vd., 1995; Yackel ve Cobb, 1996) öğrenmede bireysel bilişsel eylemlerle birlikte sosyal etkileşimlerin önemli olduğu vurgulanmıştır.

Piaget, bireyin kullandığı eylemleri daha üst bir düzeyde organize etmesinin öğrenmeyi sağlayan önemli bir unsur olduğunu vurgulamıştır. Bu bağlamda odak öğrenciler, "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" bağıntısını keşfettikten sonra "Uzunluk x Genişlik" bağıntısının "Taban Yüzeyinin Alanı" ifadesine eşit olduğu sonucundan hareketle "Taban Yüzeyinin Alanı x Yükseklik" bağıntısına ulaşarak eylemlerini daha üst bir düzeyde organize etmişlerdir. Benzer şekilde Ali ve Murat'ın "Uzunluk x Yükseklik" bağıntısının "Ön Yüzün Alanı" ifadesine eşit olduğu sonucundan hareketle "Ön Yüzün Alanı x Genişlik" bağıntısını keşfetmeleri de eylemlerini daha üst bir düzeyde organize ettiklerinin başka bir örneği olarak görülebilir. Öğretim deneyi sürecinin son kısmı olarak gerçekleştirilen son klinik görüşmeler sonucunda dikdörtgen prizmalarda hacim ölçmeye yönelik odak öğrencilerin soyutlama mekanizmaları ortaya konulmuştur. Ortaya konulan soyutlama mekanizmaları Şekil 10'da sunulmuştur.



Şekil 10. Odak Öğrencilerin Soyutlama Mekanizmaları

Şekil 10'da görüldüğü gibi, her üç odak öğrenci de dikdörtgen prizmalara ilişkin öğretim sürecinde keşfettikleri ve yapılandırdıkları hacim ölçme bağıntılarını ve bağıntıların altında yatan ilkeleri, zihinsel ilişkiler kurarak derin (düşünmeye dayalı) düzeyde soyutlamışlardır. Öğrenciler, "Uzunluk x Genişlik x Yükseklik" ve "Birinci kattaki birim küp sayısı x Yükseklik" bağıntıları ile ilgili her bir kattaki sıra sayısı ile her bir sıradaki birim küp sayısı çarpımının her bir kattaki birim küp sayısına ve yüksekliğin de kat sayısına eşit olduğunu belirten zihinsel ilişkileri kurabilmişlerdir. Aynı zamanda dikdörtgen prizmaların boyut uzunluklarının birim küplerden farkını keşfetmişlerdir. Bununla birlikte "Taban yüzeyinin alanı x Yükseklik" hacim ölçme bağıntısıyla ilgili prizmaların genişliği ile uzunluğunun çarpımının her bir kattaki birim küp sayısına ve taban yüzey alanına eşit olduğunu gösteren zihinsel ilişkileri kurabilmişlerdir. Benzer şekilde Ali ve Murat, dikdörtgen prizmaların yüksekliği ile uzunluğunun çarpımının ön yüzün alanına eşit olduğunu gösteren zihinsel ilişkiyi kullanarak "Ön yüzün alanı x Genişlik" hacim ölçme bağıntısına ulaşmışlardır. Aynı zamanda yüzey alanının birim küplerden farkını ayırt ederek yüzey alanını birim kare olarak yapılandırarak üç boyuttan iki boyuta geçiş yapabilmişlerdir.

Sonuç olarak Zembat (2016), soyutlama mekanizmasının matematiksel bilginin oluşturulduğu süreci detaylı bir biçimde ortaya koymakta önemli bir araç olduğunu belirtmektedir. Dubinsky (1991) ve Simon (1995) ise derin soyutlamanın bilişsel gelişim için temel olduğunu ve ileri düzeyde matematiksel düşünmeler için güçlü bir araç olabileceğini vurgulamışlardır. Bu bağlamda üç öğrencinin de araştırma kapsamında edindiği bilgi, beceri ve sosyal deneyimlerinin gelecekteki öğrenim yaşantılarında matematiksel düşünmelerine katkıda bulunabileceği söylenebilir.

Öneriler

Bu araştırmadan elde edilen bulgular ve sonuçlar doğrultusunda çeşitli önerilerde bulunulabilir. TÖYH çerçevesinde gerçekleştirilen öğretim sürecinin öğrenme teorisi olan yapılandırmacı yaklaşıma öğretim bağlamında kullanışlı ve pratik bir uygulama kazandırdığı görülmüştür. Bu bağlamda matematik dersi öğretim programlarında bir öğretim aracı olarak TÖYH'ye yer verilebilir. Araştırmada odak öğrencilerin matematiksel soyutlamalarında bilişsel faktörlerin yanı sıra sosyolojik faktörlerin destekleyici olduğu görülmüştür. Dolayısıyla matematik öğrenme, GBA teorik yaklaşımı çerçevesinde matematik dersi öğretim programlarında yer alabilir. Bu teorik çerçeve ışığında küçük grup ve sınıf tartışması olarak iki aşamada tasarlanan öğrenme ortamının farklı başarı düzeylerinde olan öğrencilerin etkileşim içerisinde olarak akranlarından öğrenebilmeleri ve özellikle de düşük başarı düzeyine sahip öğrencinin gelişim kaydetmesi bakımından destekleyici araçlar sunduğu söylenebilir. Dolayısıyla öğretmenlerin sınıf etkinliklerinde bireysel çalışmaların yanında grup çalışmaları tasarlamaları önerilmektedir. Araştırmada her bir haftanın planı tasarlanırken farklı materyaller ve temsiller kullanılarak etkinlikler tasarlanmıştır. Günlük yaşamdan görsel ve somut dikdörtgen prizma temsilleri, öğretim materyali olan birim küp takımları, geomag mıknatıs ve çubukları, teknoloji kullanımı gibi çeşitli araçlar kullanılarak tasarlanan etkinliklerin öğrencilerin öğrenmeleri için kolaylaştırma anlamında yararlı araçlar sundukları görülmüştür. Dolayısıyla öğretmenler, etkinlikler tasarlarken bu etkinlikleri farklı başarı düzeyine ve öğrenme hızına sahip öğrencilerin öğrenebilmelerini kolaylaştıracak şekilde farklı materyallerin kullanımı ile desteklemelidir. Öte yandan bu araştırmada TÖYH çerçevesinde tasarlanan bir öğretim deneyi gerçekleştirilmesine karşın hacim ölçmeye ilişkin bir TÖYH geliştirilmemiştir. Dolayısıyla dikdörtgen prizmalarda hacim ölçmeye ilişkin TÖYH'nin geliştirildiği bir başka çalışma gerçekleştirilerek alana katkı sunulabilir.

Kaynakça

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* içinde (s. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Battista, M. T. ve Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 258-292.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 23-41.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. D. A. Grouws, T. J. Cooney ve D. Jones (Ed.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching* içinde (s. 27-46). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. ve Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 389-409.

Bozkurt, A. ve Koç, Y. (2012). Investigating first year elementary mathematics teacher education students' knowledge of prism. *Educational Sciences: Theory and Practice, 12*(4), 2949-2952.

Cobb, P. (1989). Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 32-42.

Cobb, P. (1990). Multiple perspectives. L. P. Steffe ve T. Wood (Ed.), *Transforming children's mathematics education. International perspectives* içinde (s. 200-215). Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher, 23*(7), 13-19.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(1), 5-43.

Cobb, P. ve Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3), 175-190.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. ve Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B. ve Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(1), 3-9.

Cobb, P., Yackel, E. ve Wood, T. (1989). Young children's emotional acts while doing mathematical problem solving. D. B. McLeod ve V. M. Adams (Ed.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* içinde (s. 117-148). New York: Springer-Verlag.

Cobb, P., Yackel, E. ve Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 99-122.

Clements, D. H. ve Mcmillen, S. (1996). Rethinking "concrete" manipulatives. *Teaching Children Mathematics, 2*(5), 270-279.

diSessa, A. ve Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 77-103.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* içinde (s. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

French, D. (2004). Perimeter, area and volume. *Teaching and learning geometry* içinde (s. 65-77). London: Continuum.

Gallagher, J. M. ve Reid, D. K. (1981). *The learning theory of Piaget and Inhelder.* Monterey, CA: Brooks/Cole Publishing Compony.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2016). Matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgilerinin incelenmesi: Prizma örneği. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 16*(2), 451-482.

Hirstein, J. J. (1981). The second national assessment in mathematics: Area and volume. *Mathematics Teacher, 74*(9), 704-708.

Kim, E. M. (2016). *Preservice teachers' understandings of volume and its measurement in everyday and school contexts* (Yayımlanmamış doktora tezi). Michigan State University, Michigan.

McClain, K. ve Cobb, P. (2001). Supporting students' ability to reason about data. *Educational Studies in Mathematics, 45*(1-3), 103-129.

Olkun, S. (1999). *Stimulating children's understanding of rectangular solids made of small cubes* (Yayımlanmamış doktora tezi). Arizona State University, USA.

Olkun, S. (2003). Öğrencilere hacim formülü ne zaman anlamlı gelir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 25*(1), 160-165.

Özmantar, M. F., Bingölbali, E., Demir, S., Sağlam, Y. ve Keser, Z. (2009). Değişen öğretim programları ve sınıf içi normlar. *International Journal of Human Sciences, 6*(2), 2-23.

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction.* Sussex, England: Psychology Press.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal Research Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 359-371.

Simon, M. A. ve Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Simon, M. A., Saldanha, L., McClintock, E., Akar, G. K., Watanabe, T. ve Zembat, I. O. (2010). A developing approach to studying students' learning through their mathematical activity. *Cognition and Instruction, 28*(1), 70-112.

Smith, M. K., Wood, W. B., Adams, W. K., Wieman, C., Knight, J. K., Guild, N. ... ve Su, T. T. (2009). Why peer discussion improves student performance on in-class concept questions. *Science, 323*(5910), 122-124.

Tan-Şişman, G. ve Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1293-1319.

Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 216-229.

Taş, U. E., Arıcı, Ö., Ozarkan, H. B. ve Özgürlük, B. (2016). *PISA 2015 ulusal raporu.* Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) Ölçme, Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü.

Toluk-Uçar, Z. (2016). Sosyomatematiksel normlar. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 605-627). Ankara: Pegem Akademi.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* Washington, DC: Falmer.

Wood, T., Cobb, P. ve Yackel, E. (1990). The contextual nature of teaching: Mathematics and reading instruction in one second-grade classroom. *JSTOR: The Elementary School Journal, 90*(5), 497-513.

Wood, T., Cobb, P. ve Yackel, E. (1995). Reflections on learning and teaching mathematics in elemantary school. L. Steffe ve Gale (Ed.), *Constructivism in education* içinde (s. 401-422). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yackel, E. ve Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yackel, E., Cobb, P. Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(5), 390-408.

Yackel, E., Cobb, P. ve Wood, T. (1993). The relationship o f individual children's mathematical conceptual development to small-group interactions. *Journal for Research in Mathematics Education, 6*, 45-54.

Zembat, İ. Ö. (2007). Yansıma dönüşümü, doğrudan öğretim ve yapılandırmacılığın temel bileşenleri. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 27*(1),195-213.

Zembat, İ. Ö. (2009). Ölçme, temel bileşenleri ve sık karşılaşılan kavram yanılgıları. E. Bingölbali ve M. F. Özmantar (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 127-154). Ankara: Pegem Akademi.

Zembat, İ. Ö. (2016). Piaget'ye göre soyutlama ve çeşitleri. E. Bingölbali, S. Arslan İ. Ö. ve Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 448-458). Ankara: Pegem Akademi.