Eğitim ve Bilim

Orijinal Makale

Cilt 49 (2024) Sayı 220 59-81

Birinci Sınıf Öğrencilerinin Toplama İşlemi Problemlerindeki Strateji Seçimleri *

Şerife Sevinç [1], Mine Işıksal Bostan [2], Erdinç Çakıroğlu [3]

Öz

Bu çalışmanın amacı, birinci sınıf öğrencilerinin toplama problemlerini çözerken yöneldikleri strateji seçimlerinde rol oynayan faktörleri anlamaktır. İki adet 1. Sınıf grubundan seçilen altı öğrenci çalışmanın odak katılımcılarını oluşturmaktadır. Çalışmanın verileri, 2018-2019 akademik öğretim yılı boyunca gerçekleştirilen beş klinik görüşme aracılığıyla toplanmıştır. Görüşmeler, Baroody ve Ginsburg'un (1986) üç faktörden oluşan teorik çerçevesi temel alınarak analiz edilmiştir: (i) problemin anlamsal yapısı, (ii) bilişsel ekonomi ve (iii) problemdeki sayıların büyüklüğü. Çalışmanın bulguları, belirli bir strateji özelinde doğrudan bir eğitim almayan birinci sınıf öğrencilerinin oldukça ileri düzeylerde çeşitli stratejiler geliştirebildiğini göstermiştir. Öğrencilerin strateji seçimlerini etkileyen faktörlerle ilgili olarak, çalışmanın bulguları Baroody ve Ginsburg'un (1986) teorik çerçevesini doğrulamakla birlikte, çerçevede yer alan faktörleri üç kategoride genişletmiştir: (i) matematiksel işlemin anlamsal yapısı ve problemde verilen sayıların sırası, (ii) bilişsel ekonomi için sayı kombinasyon ailelerinin esnek ve kavramsal kullanımı ve (iii) problemlerde yer alan sayıların büyüklüğüne ek olarak sayıların ilişkisel olarak stratejik seçimi. Çalışmada ayrıca, bu kategoriler temelinde öğrencilerin strateji seçimleri ve strateji seçimlerini etkileyen faktörler eğitimsel çıkarımlar açısından tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler

Toplama işlemi
Toplama işlemi problemleri
Çözüm stratejileri
Strateji seçimleri
Tasarım temelli araştırma

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 17.02.2023
Kabul Tarihi: 29.04.2024
Elektronik Yayın Tarihi: 27.09.2024

DOI: 10.15390/EB.2024.12597

Giriş

“Aritmetiği problem çözme olarak öğrenmek” erken matematik eğitiminde önemli bir araştırma alanıdır (Verschaffel, Greer ve DeCorte, 2007, s. 559) çünkü sayıların ve işlemlerin sağlam bir şekilde anlaşılması sadece şimdiki değil gelecekteki matematik öğrenimini de geliştirir. Aritmetik işlemler için strateji geliştirmenin önemi, matematik öğrenimi için bu yenilikçi desteğe dayanmaktadır. Daha açık bir şekilde ifade edersek, araştırmalar zihinsel aritmetik stratejiler repertuarı geliştirmiş öğrencilerin ilerleyen sınıflarda farklı problem durumlarına ilişkin anlayışlarının arttığını göstermiştir (Bailey, Littlefield ve Geary, 2012; Verschaffel vd., 2007).

* Bu çalışmanın yazarlarından Erdinç Çakıroğlu hocamız makalenin değerlendirmesi ve tüm düzeltmeleri tamamlandıktan sonra basım sürecinde elim bir şekilde aramızdan ayrılmıştır. Makale, 1. ve 2. yazarlar tarafından hocamızın anısına kendisine adanmıştır.

[1] Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, sserife@metu.edu.tr
[2] Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, misiksal@metu.edu.tr
[3] TED Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, erdinc.cakiroglu@tedu.edu.tr

Strateji geliştirme, matematik eğitimi araştırmacılarının ilgisini çekmiştir çünkü aritmetik stratejiler sayma, birleştirme ve ayrıştırma gibi kritik bilişsel işlemleri içerir, dolayısıyla "bilişsel avantaj" sağlar (Clements ve Sarama, 2007, s. 474) ve "ezberci bellek üzerindeki yükü azaltır" (Jordan, Kaplan, Locuniak ve Ramineni, 2007, s. 44). Bu nedenle, farklı stratejilerle uğraşmak analitik akıl yürütmenin temelini oluşturur ve erken dönemde matematiğin merkezinde yer alması gerekir. Bu bağlamda erken yaşlarda öğrencilerin strateji repertuarını artırmanın yollarını geliştirmek araştırmacıların ilgisini çekmiş (Sunde ve Sunde, 2019) ve dört işlem için strateji geliştirme birçok ülkenin matematik eğitimi müfredatında ele alınmıştır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; NCTM, 2000).

İlkokul matematik öğretim programındaki bu vurguya rağmen, özellikle Türkiye'de yapılan araştırmalar öğrencilerin standart algoritma kullanma eğiliminde olduklarını (Kayhan-Altay, 2023) ve öğrencilerin zihinden hesaplama stratejilerinin sınırlı olduğunu göstermiştir (Duran, Doruk ve Kaplan, 2016; Güç ve Hacısalihoğlu, 2016). Ayrıca, Güç ve Hacısalihoğlu (2016), öğrencilerin bilişsel yükü azaltmasa bile aşina oldukları stratejileri kullanma eğiliminde olduklarını iddia etmektedir. Bu çalışmalar, öğrencilerin neden bazı stratejileri diğerlerine oranla daha çok tercih ettiklerini anlama ihtiyacını doğurmuştur. Bu ihtiyaca yanıt olarak, bu çalışma birinci sınıf öğrencilerinin toplama işlemi problemlerini çözerken geliştirdikleri çeşitli stratejileri ve bu strateji seçimlerini etkileyebilecek faktörleri anlamayı amaçlamaktadır. Bu çalışmada aşağıdaki araştırma sorularına cevap aranmıştır:

1. Birinci sınıf öğrencilerinin toplama işlemi problemlerini çözerken kullandıkları stratejiler nelerdir?
2. Birinci sınıf öğrencilerinin toplama işlemine yönelik strateji seçimlerini etkileyen faktörler nelerdir ve bu faktörler seçimlerini nasıl etkilemiştir?

Bu araştırma sorularını cevaplamak için, Ankara'da bir devlet ilkokulunda okuyan altı birinci sınıf öğrencisi ile yapılan toplama işlemi odaklı görüşmeler incelenmiştir. Öğrenci görüşmelerinin analiz sonuçları, bir sonraki bölümde açıklanan öğrencilerin zihinsel stratejileri ve strateji seçimlerini etkileyen faktörlerin teorik çerçevesi ışığında sunulmuştur.

Teorik Çerçeve

Bu çalışma, öğrencilerin aritmetik problemlere ilişkin stratejileri ve öğrencilerin strateji seçimlerini etkileyen faktörler çerçevesinde şekillenmiştir.

Öğrencilerin Aritmetik Problemlere Yönelik Stratejileri

Matematik ve çocuk eğitimi araştırmacıları öğrencilerin sayı duyusu ve işlem gelişimini kapsamlı bir şekilde araştırmıştır (Fuson, 2003; NCTM, 2000). Bu alandaki araştırmalar başlıca iki bakış açısı sunmaktadır; bazı araştırmalar öğrencilere belirli stratejileri öğretmeyi amaçlayan bir öğretimi desteklerken (örneğin, Baroody, Purpura, Eiland ve Reid, 2015; Sunde ve Sunde, 2019), diğerleri öğrencilerin strateji gelişimini desteklemek için öğrenme kaynaklarını ve bilişsel yapı taşlarını düzenlemeyi önermektedir (örneğin, Chu, Rouder ve Geary, 2018; Mulligan, 2004; Schiffman ve Laski, 2018). Örneğin, Sunde ve Sunde'nin çalışması (2019) öğrencilerin stratejilerini değiştirmeye yönelik öğretim uygulamalarını araştırmayı içerirken, Mulligan (2004) geleneksel algoritmik prosedürleri öğretmenin yanı sıra sayısal stratejiler geliştirmek için erken okul döneminde çocukların sayı duyularını geliştirmeyi önermektedir. Öte yandan, her iki bakış açısı da stratejilerin problem çözmede ilerleyen sınıflarda önemli bir rol oynadığını savunmaktadır (Bailey vd., 2012; Pongsakdi vd., 2020; Sievert, van den Ham, Niedermeyer ve Heinze, 2019; Verschaffel vd., 2007; Verschaffel, Schukajlow, Star ve Van Dooren, 2020).

Araştırmacılar, sayılara ilişkin parça-parça-bütün bilgisinin, aritmetik problemleri çözmeye yönelik stratejiler geliştirmenin merkezinde yer aldığını öne sürmüştür (Carpenter, Fennema ve Franke, 1996; Ding ve Auxter, 2017; Verschaffel vd., 2007). Aslında bu ikisi arasında karmaşık ve çift yönlü bir ilişki vardır. Parça-parça-bütün anlayışı keşfedilen çözüm stratejilerinin geliştirilmesine yol açmakla kalmaz, aynı zamanda keşfedilen stratejiler de öğrencilerin parça-parça-bütün ilişkilerini anlamalarına katkıda bulunur. Dahası, parça-parça-bütün ilişkisi, birimler arasındaki ters ilişkiler gibi diğer matematiksel ilişkiler için de bir temel oluşturur ve bilişsel esneklik sağlar (Chu vd., 2018; Ding ve Auxter, 2017). Ayrıca, Carpenter, Moser ve Bebout (1988) uzun süreli araştırması toplama ve çıkarma işleminde keşfedilen stratejilerin sayı kavramının anlamlandırılmasıyla doğrudan şekilde ilişkili olduğunu göstermiştir.

Uluslararası ve ulusal alanda son zamanlarda yapılan çalışmalar da benzer bulguları dile getirmektedir. Örneğin, Schiffman ve Laski (2018) öğrencilerin sayıları kavramsal olarak anlamalarına yardımcı olan birleştirme ve ayrıştırmaya dayalı stratejiler geliştirebildiklerini belirtmiştir. Benzer şekilde, bir başka çalışmada Chu ve diğerleri (2018) öğrencilerin sayılar arasındaki parça-parça-bütün ilişkilerine (sayı kombinasyon aileleri gibi) dayalı ileri düzey stratejiler geliştirebildiklerini ve bunun da sayıların kardinal değer anlamını geliştirebilmelerine yardımcı olduğunu belirtmiştir. Duran ve diğerleri (2016) ise ilkokul olmasa da ortaokul öğrencilerinin en sık kullandıkları stratejinin ayrıştırma ve birleştirme olduğunu söylemektedir. Öte yandan, Güç ve Hacısalihoğlu (2016) ortaokul öğrencilerinin zihinden toplama çalışmalarında ayrıştırmaya daha az yer verdiklerini belirtmektedir. Bu farklı bulgular, öğrencilerin strateji seçimlerinin daha fazla araştırılması gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Bu bağlamda bu çalışmada birinci sınıf öğrencilerinin toplama işlemi problemlerindeki strateji seçimlerinin araştırılması amaçlanmıştır.

Araştırmalar ayrıca toplama işlemine ilişkin öğrencilerin keşfettikleri stratejilerin sayma becerileriyle güçlü bir şekilde ilişkili olduğunu göstermiştir, çünkü öğrencilerin saydıkça toplama ve çıkarma işlemleriyle bağlantılı kardinal anlam geliştirdikleri görülmüştür (Bailey vd., 2012; Duran vd., 2016; Zur ve Gelman, 2004). Guerrero ve Palomaa'nın (2012) çalışması ise, öğrencilerin sayma stratejileriyle başladıklarını ancak problemlerdeki toplananlar ve toplamın sayısal değerlerine bağlı olarak çeşitli stratejiler kullandıklarını vurgulamıştır. En temel sayma stratejileri (1) tümünü sayma ve (2) üzerine saymadır (Clements, Sarama, Baroody ve Joswick, 2020; Guerrero ve Palomaa, 2012; Kayhan-Altay, 2023). Tümünü sayma stratejisinde, örneğin 3+5 problemini çözerken öğrenciler 1'den 8'e kadar saymaya başlar. Üzerinde sayma stratejisinde ise, öğrenciler sayılardan birini akıllarında tutar ve o sayıdan başlayarak saymaya başlar (örneğin, 3'ten 8'e kadar sayma). Üzerinde sayma stratejisinin daha gelişmiş bir versiyonu ise, öğrencilerin 3 yerine 5'ten başlayarak altı, yedi ve sekiz olarak saydığı daha büyük sayıdan saymaya başlama stratejisidir. Bu, üzerine sayma stratejisinin gelişmiş bir versiyonudur çünkü büyük sayıdan başlanırsa üzerine sayılacak daha az sayı vardır. Bahsedilen bu sayma stratejilerinde, öğrencilerin "sayılan miktar" için kardinal anlam geliştirdiklerini ve akıl yürütmeyi toplama ve çıkarma problemlerini çözmek için başarıyla kullandıklarını görülmüştür (Fuson, 1992; Sunde ve Sunde, 2019).

Saymanın yanı sıra, öğrenciler genellikle "sayı kombinasyon aileleri" olarak bilinen ve 10'u oluşturan sayı ikililerini kullanırlar. Örneğin, onluk yapmak için parçalara ayırma ile onluk ve/veya birliklerine ayırma, bu stratejilerden türeyen iki stratejidir (Clements vd., 2020). 10'u oluşturan sayı ikililerini kullanmak, iki nedenden ötürü temel ve önemli sayılır. İlk olarak, 10'u bir referans olarak düşünmek, 10'u kullanabilmenin çeşitli yollarını kapsar. İkinci olarak ise, 10'u oluşturmak için işe koşulan birleştirme veya ayrıştırma zihinsel süreçleri, birçok stratejinin merkezinde yer alan parça-parça-bütün ilişkisini gerektirir. Ayrıca, 10 dışındaki sayıları oluşturmak için farklı sayı kombinasyon ailelerinin kullanılması da keşfedilen stratejiler arasında yer almaktadır (Baroody vd., 2015; Fuson, 1992). Özellikle, 6'yı 5 ve 1 veya 3 ve 3 sayı ikilisi olarak görebilme, iki katını alma veya iki katına 1 ekleme gibi diğer etkili stratejiler için bir temel oluşturur (Baroody vd., 2015; Guerrero ve Palomaa, 2012). Burada farklı sayı kombinasyon ailelerinin ilişkisel düşünmeye, özellikle de parça-parça-bütün ilişkilerine dayandığını belirtmek önemlidir (Chu vd., 2018; Kayhan-Altay, 2023). Bu tür bir ilişkisel anlayış, kavramsal anlayış üzerine inşa edilen etkili stratejilerin geliştirilmesinde, dolayısıyla problem çözme becerilerinin ve modelleme yetkinliklerinin gelişmesinde oldukça önemlidir (Schiffman ve Laski, 2018; Verschaffel vd., 2020). Dolayısıyla, strateji geliştirme yetkinliği öğrencilerin üst sınıflara doğru ilerledikçe matematiksel düşünmelerinin ilerlemesine ve daha soyut matematiksel bilgiler geliştirmelerine katkıda bulunmakta ve verimli öğrenme deneyimlerini kolaylaştırmada önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, aritmetik stratejilere odaklanan güncel çalışmalar, strateji seçimlerinde esneklik ve uyarlanabilirlik geliştirmeye de vurgu yapmaktadır (Russo ve Hopkins, 2018; Sunde ve

Sunde, 2019). Öğrenciler, mevcut stratejilere dayalı olarak yeni stratejiler uyarlayarak ve belirli problem çözme bağlamları için daha etkili stratejileri esnek bir şekilde kullanarak "strateji repertuarı" oluşturabilirler. Çünkü, böyle bir repertuarın eksikliği, öğrencilerin *çıkarma işlemini toplama gibi düşünebilme* gibi daha karmaşık stratejiler geliştirmesini engelleyebilir (Verschaffel, De Smedt, Van Der Auwera ve Torbeyns, 2021).

Strateji repertuarının önemini göz önünde bulundurarak, araştırmacılar (örneğin, Carpenter ve Fennema, 1992; Carpenter vd., 1988; Clements vd., 2020), öğrencilerin toplama ve çıkarma problemlerindeki stratejilerini etkileyen problem türlerini araştırmışlardır. Benzer şekilde, son zamanlarda yapılan bir çalışmada, Kayhan-Altay (2023) 2., 3. ve 4. sınıf öğrencilerinin strateji performanslarını farklı problem türleri (toplamın bilinmediği problemler, telafi problemleri ve kovaryasyon problemleri) kullanarak araştırmış ve tüm sınıf seviyelerindeki öğrencilerin toplamın bilinmediği problem türünde daha iyi performans gösterdiğini bulmuştur. Ayrıca bu çalışma, birinci sınıflar hariç diğer sınıflardaki öğrencilerin standart algoritma kullanma eğiliminde olduğunu göstermiştir (Kayhan-Altay, 2023). Öğrencilerin zihinden hesaplama stratejilerinin sınırlı olduğu benzer gözlemler başka çalışmalarda da rapor edilmiştir (Duran vd., 2016; Güç ve Hacısalihoğlu, 2016). Bu bağlamda, Güç ve Hacısalihoğlu (2016) öğrencilerin aşina oldukları stratejileri kullanma eğiliminde olduklarını ve standart algoritmanın öğretimde ve ders kitaplarında en sık kullanılan yöntem olmasının öğrencilerin standart algoritma kullanma eğilimlerini etkilemiş olabileceğini iddia etmektedir.

Aritmetik problem çözmede strateji geliştirme potansiyeli, yalnızca ortaya konan problemlerin doğasından değil, aynı zamanda sayı doğrusu (Schiffman ve Laski, 2018) ve ders kitapları (Sievert vd., 2019) gibi öğrenme kaynaklarının ulaşılabilirliğinden de etkilenebilir. Bu bağlamda, ilkokul öğretmenlerinin yeterliliklerini araştıran çalışmalar, öğretmenlerin strateji gelişiminde araç gereç kullanımının da (örneğin sayma stratejilerinin gelişimi için yüzlük kart kullanımı) önemini vurgulamaktadır (Kalaycıoğlu Akis ve Şahin, 2023; Üstündağ ve Özçakır Sümen, 2023). Strateji için bir kaynak olarak gösterilen ders kitaplarıyla ilgili olarak, Bütüner (2020) 3. ve 4. sınıf Türk ve Singapur matematik ders kitaplarını karşılaştırmış ve Türk ders kitaplarının Singapur ders kitaplarına oranla strateji geliştirme için nispeten sınırlı fırsatlar içerdiğini belirtmiştir.

Ayrıca, Guerrero ve Palomaa (2012) daha fazla sayıda toplanan ve daha çok basamaklı sayıları içeren toplama işleminin, tek basamaklı toplama problemlerine oranla daha çeşitli stratejilere teşvik edebileceğini belirtmektedir. Başka bir deyişle, sayıların büyüklüğü öğrencilerin geliştirebileceği strateji çeşitliliğini de etkilemektedir (Guerrero ve Palomaa, 2012; Verschaffel vd., 2007). Kayhan-Altay'ın (2023) çalışması da telafi ve kovaryasyon problemlerinde sayıların amaçlı bir şekilde seçilmesinin problemlerin bilişsel yükünü artırdığını ve 2., 3. ve 4. sınıf öğrencilerinin bu problemler için strateji geliştirmekte zorlandıklarını göstermektedir. Öte yandan, Pongsakdi ve diğerlerinin (2020) çalışması, problemde yer alan sayıların (sayısal faktörlerin) öğrencilerin probleme dair zorluk algılarını etkilemediğine dair başka bir bakış açısı ortaya koymaktadır.

Daha önce de belirtildiği gibi, strateji odaklı öğretim çeşitli sonuçlar doğurmaktadır (Baroody vd., 2015; Chu vd., 2018; Mulligan, 2004; Schiffman ve Laski, 2018; Sunde ve Sunde, 2019). Ancak çalışmalar, öğretmenin belirli bir stratejiyi öğretmeyi amaçlayan bir öğretim sunmamasına rağmen, öğretim uygulamaları ve kaynak kullanımı sayesinde öğrencilerin strateji repertuarını etkilediğini savunmaktadır (Schiffman ve Laski, 2018; Sievert vd. 2019; Sunde ve Sunde, 2019). Bu bağlamda, Türkiye'deki ilkokul öğrencilerinin stratejilerini inceleyen çalışmalar, üçüncü sınıf öğrencilerinin diğer sınıf seviyelerine kıyasla daha iyi bir performans gösterdiğini ortaya koymuş ve araştırmacılar, istatistiksel olarak anlamlı olmasa da bu farkı matematik öğretim programına dayandırarak açıklamıştır (Bacakoğlu ve Tertemiz, 2022; Kayhan-Altay, 2023). Daha açık bir ifade ile, üçüncü sınıf matematik öğretim programı yuvarlama, sayı çiftleri (veya sayı kombinasyon aileleri), üzerine sayma ve ayrıştırma gibi zihinden toplama stratejilerini içerdiğinden (MEB, 2018), çalışmalar üçüncü sınıf öğrencilerinin performanslarını strateji öğretimi ile ilişkilendirmektedir.

Buna ek olarak, Baroody ve diğerleri (2015), belirli bir düzeyde rehberlik ve öğretimin öğrencilerin strateji gelişimini etkileyebileceğini, ancak uygun bir öğrenme ortamı sağlandığında öğrencilerin stratejiye yönelik öğretim verilmeksizin de çeşitli stratejiler geliştirebileceğini savunmaktadır (Torbeyns, Verschaffel ve Ghesquière, 2005). Hatta çocukların örgün eğitime girmeden önce sayma, birleştirme ve ayrıştırma gibi çeşitli stratejilere sahip oldukları belirtilmektedir (Wright, 1998, Wright, Mulligan ve Gould, 2000). Benzer şekilde, Kayhan-Altay'ın (2023) çalışmasında, nadiren de olsa, ikinci sınıf öğrencilerinin belirli bir öğretim almadan da parça-parça-bütün ilişkisini toplama problemlerini çözmek için kullanabildikleri görülmüştür. Ancak, öğretmenler öğrencilerin sınıfa getirdiği bu stratejileri ortaya çıkartabilecek kilit aktörlerdir. Bu nedenle, öğretmenlerin stratejilerin bilişsel olanaklarını ve kısıtlamalarını belirleme ve matematik öğretiminde çoklu stratejileri kullanma konusundaki bilgi ve becerilerini geliştirmek dikkate alınması gereken bir konudur (Durkin, Star ve Rittle-Johnson, 2017). Dolayısıyla, bu çalışma birinci sınıf öğrencilerinin toplama problemlerindeki strateji seçimlerini inceleyerek, öğretmenlere öğrencilerin strateji repertuarını geliştirme konusunda katkıda bulunabilir.

Strateji Seçimlerini Etkileyen Faktörlerin Teorik Çerçevesi

Baroody ve Ginsburg (1986) öğrencilerin strateji seçimleri için üç faktöre dayalı bir çerçeve önermiştir: (i) problemin anlamsal yapısı, (ii) bilişsel ekonomi ve (iii) problemdeki sayıların büyüklüğü.

İlk faktör olan *problemin anlamsal yapısı*, problemin birleşim ve değişim durumu içerip içermemesi ile ilgilidir (Cowan, 2003). Bu durumlar, öğrencilerin problemi çözmek için gerçekleştirecekleri bilişsel işlemi tanımlamaları açısından kritik bir öneme sahiptir. Örneğin, birleşim problemi iki nicelik kümesini fiziksel ya da zihinsel olarak birleştirmeyi içerir (örneğin, "Peter'ın 3 elması var ve Anne'nin 7 elması var. İkisinin toplam kaç elması var?" (Baroody ve Ginsburg, 1986, s. 86) ve iki yapılı bir toplama anlayışını ifade eder. Öte yandan, değişim problemi (Örneğin, "Pete'in 3 elması var. Ann ona 7 elma daha verdi. Pete'in şimdi kaç elması var?" (Baroody ve Ginsburg, 1986, s. 86) tek bir kümenin kardinalitesindeki değişikliği tanımlar ve bu nedenle tek yapılı bir toplama anlayışını ifade eder. Araştırmacılar, öğrencilerin birleşim durumu içeren iki yapılı problemlerde daha büyük sayıdan saymaya başlama ve değişim durumu içeren tek yapılı problemlerde birinci toplanandan başlayarak sayma eğiliminde olduklarını ve bunun da problemlerin anlamsal yapılarıyla ilişkili olabileceğini ileri sürmektedir.

İkinci faktör olan *bilişsel ekonomi*, problemin bilişsel talebi ile ilişkilidir ve öğrencilerin çalışma belleği üzerinde daha az talep gerektiren stratejileri tercih etme eğiliminde olduklarını göstermektedir. Bu bağlamda, öğrenciler "çalışma belleği üzerindeki yükü azaltacak" yeni stratejiler keşfedebilir (Baroody ve Ginsburg, 1986, s. 86). Birinci toplananın ikinci toplanandan daha küçük olduğu toplama problemlerinde, saymaya büyük sayıdan başlama stratejisi, birinci toplanandan başlayarak sayma stratejisine göre daha az sayma çabası gerektirir ve bu nedenle bilişsel olarak daha ekonomik bir strateji seçimi olarak görünür (Cowan, 2003).

Son faktör olan *problemdeki sayıların büyüklüğü* de bilişsel ekonomiyi işaret etmektedir, ancak daha büyük sayıları içeren problemlerde belirli bir stratejinin etkinliğinin değerlendirilmesini de içerir. Örneğin, 4+22 problemi için öğrencilerin strateji seçimi büyük sayıdan başlayarak sayma olacaktır çünkü 22'ün üzerine dört daha saymak, 4'ten başlayarak üzerine yirmi iki saymaktan daha az çaba gerektirir. Böylece, öğrenciler bilişsel ekonomiyi problemdeki sayıların büyüklüğüne göre değerlendirip ve özellikle problemde toplananlardan biri daha büyük bir sayı içeriyorsa, büyükten başlayarak sayma stratejisinin daha verimli olacağına karar verebilir (Baroody ve Ginsburg, 1986). Bu faktör, problemde yer alan sayıların dikkatli bir şekilde seçildiğini gösterse de özellikle belirli stratejileri teşvik etmek için daha büyük sayıların kullanılmasıyla ilgilidir. Örneğin, 4+8 probleminde sayılar, bir sayının 10'a yakın olduğu göz önünde bulundurularak seçilmiştir ve bu da "10'a tamamlama" stratejisine yol açabilir. Ancak üçüncü faktör olan problemdeki sayıların büyüklüğü bu durumu içermemektedir, çünkü 4+8 problemindeki her iki sayı da tek basamaklı sayılardır. Bu nedenle, *problemdeki sayıların büyüklüğü* faktöründe araştırmacılar toplama probleminde en az bir toplananın diğerine kıyasla kasıtlı olarak daha büyük seçilmesine dikkat çekmektedir.

Yukarıda bahsedilen faktörler doğrudan bir strateji öğretimini içermekten ziyade problemlerin doğasından kaynaklanmaktadır. Bu çalışmada bu konu mercek altına alınmış ve öğrencilerin strateji seçimlerinde etkili olabilecek diğer faktörler de göz önünde bulundurularak, bu faktörlerin toplama işlemi içeren üç farklı problem türünün çözümünde öğrencilerin strateji seçimlerini nasıl ve ne ölçüde etkilediği incelenmiştir.

Yöntem

Bu çalışma, 2017-2018 ve 2018-2019 eğitim-öğretim yıllarında Türkiye'de Ankara ilindeki bir devlet ilkokulunda yürütülen ve iki yıllık bir süreci kapsayan tasarım tabanlı bir araştırma projesinin sınırlı bir kısmını içermektedir (projenin ayrıntıları için bkz. Çakıroğlu, Işıksal-Bostan ve Sevinç, 2019). Çalışmada yer alan ilkokul, nispeten küçük ve sıradan bir devlet ilkokuludur. Dört sınıf seviyesinin her birinde iki şube bulunduğundan, çalışmaya her iki birinci sınıf şubesi de dahil olmuştur. Dolayısıyla, projenin her yılında, (her biri 18-22 öğrenciye sahip) iki adet birinci sınıf şubesiyle çalışılmıştır. Bu kapsamlı projede varsayımsal öğrenme rotası geliştirme, tasarımı yapılan öğrenme rotasının iyileştirilmesi için veri toplama, analiz etme ve öğrenme rotasının önceki uygulama aşamalarından elde edilen geri bildirimlerin ve içgörülerin de dahil edildiği döngüler yer almaktadır. Projenin metodolojik yaklaşımının bir parçası olarak, araştırma boyunca seçilen öğrencilerle bir dizi görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Mevcut çalışma, yukarıda bahsedilen kapsamlı projenin ikinci yılında seçilen öğrencilerle yapılan görüşmelerin oluşturduğu duruma odaklanmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada, tasarım temelli araştırma sürecinin tamamı değil, seçilen öğrencilerin görüşmeleri ve bu görüşmelerdeki toplama problemlerinin içerik analizi yöntemi ile incelemesi sunulmaktadır.

Katılımcılar

Bu çalışmada, iki birinci sınıf şubesinden seçilen altı öğrenciye odaklanılmıştır. Odak öğrencileri seçmek için öncelikle sınıf öğretmenleriyle görüşülmüş ve sınıfta kendini ifade etmeye hevesli öğrencilere dair görüş ve gözlemleri alınmıştır. Öğretmen gözlemlerine ek olarak, araştırmacılar kendi gözlemlerini ve eğitim-öğretim yılının başında uygulanan Sayı Bilgisi Testi (Okamoto ve Case, 1996) sonuçlarını da göz önünde bulundurmuştur. Toplama problemlerini içeren görüşmeler Güz döneminin sonuna doğru yapılmış olup, araştırma ekibi geliştirilen öğrenme rotasının takibi için her gün sınıfta hazır bulunmuştur. Dolayısıyla, araştırmacıların saha deneyimine dayalı notları da görüşmeler için seçilecek odak öğrencilerin belirlenmesine yardımcı olmuştur.

Sınıf gözlemleri ve test sonuçları analiz edilerek ortalama düzeyde sayı bilgisi performansı gösteren öğrenciler belirlenmiştir. Son olarak, belirlenen öğrenci havuzundan altı odak öğrenci çalışmaya dahil edilmek üzere rastgele seçilmiştir. Sayı Bilgisi Testi, herhangi bir görsel veya somut araç-gereç kullanmadan belirli bir miktarı algılama, belirtilen bir sayıyı tanıma ve belirli bir sayıdan 1 veya 2 fazla/eksik olanını belirleme gibi süreçleri içeren sorulardan oluşmaktadır. Test, öğrencilerin performanslarına dayalı olarak, sayı bilgisi gelişimsel yaşlarını belirleyen bir değerlendirme cetveli içermektedir (Okamoto ve Case, 1996). Testinin sonuçlarına göre, Tilbe hariç tüm öğrencilerin sayı bilgisi gelişimsel yaşı 6-7'dir ve bu da somut araç-gereçlere ihtiyaç duymadan basit sayı görevlerini yerine getirebildiklerini göstermektedir. Örneğin, tek basamaklı sayıları tanıyıp bunları bir ya da iki sayı öncesindeki ve sonrasındaki sayılarla ilişkilendirebildiklerini göstermektedir. Öte yandan, Tilbe'nin sayı bilgisi gelişimsel yaşının 5-6 olduğu, yani bir kümedeki nesne sayısını bulmak için çoğunlukla somut araç-gerece ihtiyaç duyduğu görülmüştür. Dolayısıyla, öğrencilerin dönemin başındaki sayı bilgileri, sayılar ve toplama işlemi arasında ilişkisel düşünmeyi içermemektedir. Tablo 1'de, yıl boyunca bir dizi görüşme yoluyla takip edilen öğrencilerin demografik bilgileri sunulmaktadır.

Tablo 1. Odak öğrencilerin demografik bilgileri

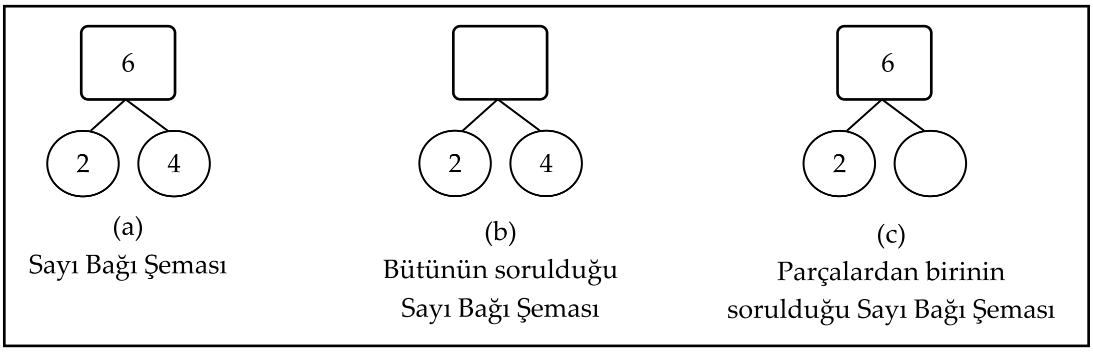
Öğrencilerin (Takma) İsimleri	Cinsiyet	Okulöncesi Eğitim Süresi
Fuat	Erkek	4 yıl
Ayaz	Erkek	2 yıl
Zehra	Kız	3 yıl
Metin	Erkek	2 yıl
Irmak	Kız	2 yıl
Tilbe	Kız	3 yıl

Her ne kadar odak öğrenciler seçilirken ve bulgular yorumlanırken öğrencilerin okulöncesi öğrenim süreleri dikkate alınmamış olsa da yukarıdaki demografik bilgiler odak öğrenciler için genel bir bakış sağlamaktadır. Araştırmanın etik değerlendirmesi Kurumsal Etik Kurulu tarafından yapılarak onaylanmıştır. Etik kurallar uyarınca, veri toplama süreci başlamadan önce veli izin formları alınmış; bulguların sunumunda takma isimler kullanılmıştır.

Öğretim Süreci

Çalışma başlamadan önce sınıf öğretmenleriyle birlikte çalışılarak sayı duyusuna ve alanyazındaki stratejilere ilişkin bir anlayış geliştirmeleri sağlanmıştır. Projenin ilk yılında, öğrenme rotasının veri odaklı revizyonları ile daha fazla ilgilenilmiş olup, ikinci yılda öğrencilerin bilişsel düşünce süreçlerine odaklanılmıştır. Bu nedenle, mevcut çalışmanın bulguları projenin ikinci yılında toplanan verilerin bir kısmına dayanmaktadır.

Sınıf öğretmenleriyle yapılan çalışmalarda, öğrencilerin toplama ve çıkarma problemlerini esnek bir şekilde çözebilmeleri için gerekli olan kavramsal anlama, işlemsel akıcılık ve muhakeme becerilerinin gelişimine ve bu sayede sayı duyusu ve işlemler arasında ilişki kurulmasına odaklanılmıştır. Sayıların ve işlemlerin anlamlı bir şekilde öğretilmesinde temsiller aracılığıyla sayı kombinasyon ailelerinin (bkz. Şekil 1) rolü özellikle vurgulanmıştır. Öğrencilere toplama işleminden önce, sayı kombinasyon aileleri araç-gereçler ve görsel materyaller yardımıyla "sayı bağları" adıyla kavramsal olarak tanıtılmıştır. Sayıların öğreniminde, sayı bağları bir niceliğin farklı sayı kombinasyonları ile ifade edilmesinde kullanılmış olup, bu aşamada sayı kombinasyonlarının birleşimi için toplama işlemine herhangi bir atıfta bulunulmamıştır. Nicelik belirleme görevlerinde, öğrencilere sıklıkla iki nesne grubu verilmiş ve Şekil 1a ve 1b'de olduğu gibi sayı kombinasyon ailelerini doldurmaları istenmiştir. Bazı durumlarda, öğrencilere biri gizli olmak üzere iki nesne grubu verilmiş ve toplamın verildiği durumda gizli nesnelerin sayısının bulunması istenmiştir (Şekil 1c). Toplama ve çıkarma işlemleri öğretilirken ise, bunlar Şekil 1'de verilen sayı bağları yapısıyla ilişkilendirilmiş ve aynı toplama veya çıkarma problemini temsil eden hem yatay hem de dikey gösterimler kullanılmıştır.



Şekil 1. Öğretim sürecinde/müdahalesinde kullanılan sayı kombinasyon ailesi örnekleri

Öğrencilerin sayı kombinasyonları üzerine düşünmeleri, küçük bir grup nesnenin miktarını kısa bir süre içinde saymadan belirlemelerinin istendiği şipşak sayma etkinliklerinde de geliştirilmiştir (Clements, 1999). Bu şekilde öğrencilerin *nicelikleri iki gruba ayırma*, *parçaları şipşak sayma* ve *toplam nesne sayısını belirleme*ye yönelik düşünmeleri teşvik edilmiştir. Bu şekilde parça-parça-bütün ilişkisine dayalı şipşak sayma, kavramsal şipşak sayma alarak adlandırılmaktadır (Clements ve Sarama, 2014).

Toplama problemleri üzerinde çalışırken, öğrencilere belirli çözüm stratejilerini içeren bir öğretim verilmemiştir. Ancak, öğrenciler sürekli olarak strateji geliştirmeye ve geliştirdikleri stratejileri sınıfta arkadaşları ile paylaşmaya teşvik edilmiştir. Çoğu durumda, öğretmenler öğrencileri problemi çözmek için alternatif yollar bulmaya ve bunu sınıfla paylaşmaya teşvik etmiştir. Dolayısıyla, sınıf öğretmenleri tarafından uygulanan öğretim süreci, geliştir-ve-paylaş rutinleri aracılığıyla öğrencilerin aritmetik problemlerde stratejik yeterliliklerini desteklemeyi amaçlamıştır.

Veri Toplama Süreci

Daha kapsamlı bir çalışmanın parçası olarak, bu çalışmada altı öğrenciyle yıl boyunca beş klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada öğrencilere sırasıyla aşağıdaki üç toplama problemi yöneltilmiş ve klinik görüşmelerde bu problemleri çözmeleri istenmiştir.

1. ***Toplamın Bilinmediği Problem:*** Okulumuzun bahçesinde 12 ağaç vardır. Bahçeye 9 ağaç daha dikildiğinde bahçede toplam kaç ağaç olur?
2. ***İkinci Toplananın Bilinmediği Problem:*** Sude'nin 6 oyuncağı vardır. Annesi Sude'ye bir miktar oyuncak daha aldığında Sude'nin 13 oyuncağı olmuştur. Annesi kaç tane oyuncak almıştır?
3. ***Birinci Toplananın Bilinmediği Problem:*** Sınıfta bir miktar öğrenci vardır. 12 öğrenci daha sınıfa gelince sınıfta toplam 19 öğrenci olmuştur. Başlangıçta sınıfta kaç öğrenci vardır?

Görüşmeler sırasında öğrencilere geçmeli küpler, onluk kartlar ve (Şekil 1'de örneği gösterilen) sayı bağı şemaları gibi materyaller sağlanmış ve bu materyallerden herhangi birini ihtiyaç duyduklarında kullanabilecekleri söylenmiştir. Ayrıca, klinik görüşmelerde öğrenciler problemleri çözerken görüşmeciler sıklıkla "Cevabı nasıl bulduğunu bana açıklayabilir misin?" ve "Başka bir şekilde çözebilir misin?" sorularını sorarak öğrencilerin düşüncelerini açığa çıkarmayı hedeflemiştir. Görüşmelerin hem ses hem de video kayıtları alınmış ve öğrencilerin tüm yazılı çalışmaları görüşme sonrası taranarak dijital ortamda kaydedilmiştir. Görüşmeleri kaydederken kamera öğrencilerin yazılarını ya da masadaki materyallerle çalışmalarını kayda alacak şekilde yerleştirilmiştir.

Veri Analiz Süreci

Çalışmanın ses ve video kayıtlarının metin dökümü yapılmış ve tüm veriler nitel veri analiz programı olan MAXQDA 2020'ye (VERBI Software, 2019) aktarılmıştır. Bu aktarım sürecinde, video/ses görüşme verileri ile bu verilen metin dökümleri senkronize edilmiştir. Bu çalışmada sunulan veri analizi, yukarıda bahsedilen daha kapsamlı tasarım temelli araştırma projesinin geriye dönük analiz sürecinde yer alan içerik analizini (Miles, Huberman ve Saldana, 2014) içermektedir. Dolayısıyla, bu çalışmanın odak noktası tasarım varsayımları ya da öğrenme rotası değil, bir vaka olarak seçilen birinci sınıf öğrencilerinin bireysel olarak bir görüşme ortamında çözdüğü toplama problemleri örnekleminin içerik analizidir.

Bu çalışmadaki içerik analizi, üç aşamadan oluşmaktadır: açık kodlama, kod kategorizasyonu ve kod ilişkileri. Analizin ilk aşamasında, öğrencilerin toplama işlemi problemlerini çözme sürecindeki bilişsel eylemleri belirlemek için açık kodlama yapılmıştır. İkinci aşamada, tüm veriler tekrar gözden geçirilmiş ve öğrencilerin geliştirdikleri stratejileri adlandırmak için bilişsel eylemler kategorize edilmiştir. Örneğin, 12+9=? problemini öğrenci şu şekilde çözmüştür: "12'den 2'yi çıkardım, sonra 9'u oraya [10'a] ekledim. Sonra 1 daha ekledim, sonra 1 daha. 21 [yaptı]." Bu çözüm için, ilk aşamada üç eylem kodlanmıştır: sayıyı onluk ve birliklere ayırma, onluk ve birlikleri birleştirme ve birer birer toplama. İkinci aşamada ise bu bilişsel eylemlerin kombinasyonu için üç strateji belirlenmiştir: *10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama*, *10'u kullanarak Sayıları Oluşturma* ve *Önce Büyük olan Birlikleri Ele*

Alma. Buna ek olarak, bilişsel eylemlerin ilişkilerini görselleştirmek için kod haritaları oluşturulmuş ve stratejilerin doğrulanmasını sağlamıştır. Dolayısıyla, sadece ham veriler ve açık kodlar incelenerek bilişsel eylemler kategorize edilmemiş, aynı zamanda görsel yöntemlerle de toplam altı strateji belirlenmiştir: (1) Üzerine Sayma, (2) 10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama, (3) 10'u kullanarak Sayıları Oluşturma, (4) Önce Büyük olan Birlikleri Ele Alma, (5) Onlukları Göz Ardı Etme ve Sayı Bağı İkililerini Kullanma ve (6) İki Katının Bir Fazlasını Alma (stratejilerin detaylı gösterimi için bkz. Tablo 2).

Veri analizinin son aşaması bir dizi çapraz karşılaştırmalı analiz içermektedir. İlk olarak, öğrencilerin strateji seçimlerinin örüntüsü incelenerek öğrencilerin stratejilerini etkileyen faktörler belirlenmiştir. Böylece, strateji kodlarının öğrenciler arasındaki benzer ve farklılıkları karşılaştırılmıştır. İkinci olarak, teorik çerçevenin ilk faktörü olan problemin anlamsal yapısını belirlememizi sağlayan toplama problemi türleri arasındaki strateji çeşitliliği incelenmiştir. Üçüncü olarak, problem türüne göre kategorize edilen stratejiler, strateji seçimi çerçevesinin üç faktörü temel alınarak karşılaştırılmıştır. Örneğin, yukarıdaki örnekte, öğrencilerin bilişsel eylemleri, sayıyı onluk ve birliklere ayırma ve önce büyük olan birlikleri birleştirerek bilişsel talebi azaltmayı amaçlamıştır. Bu nedenle verinin bu kısmı bilişsel talep faktörünü işaret etmiştir.

Çalışmanın güvenirliğini artırmak için üçgenleme (triangulation) yöntemi kullanılmıştır. Öğrencilerin stratejileri hakkında daha fazla bilgi edinmek ve bulguları desteklemek için birden fazla veri kaynağı (örneğin, öğrencilerin yazılı çalışmaları, video/ses verileri ve görüşme deşifreleri) kullanılmıştır. Ayrıca, ilk iki aşamada iki araştırmacı verileri birlikte kodlamıştır. Bu nedenle, bilişsel eylemler ve strateji sınıflandırmaları konusundaki anlaşmazlıklar, veri kodlaması sırasında çözülmüştür. Analizin üçüncü aşamasındaki bulgular ise her üç araştırmacının katıldığı toplantılarda tartışılmıştır. Bu aşama, öğrencilerin stratejilerine dayalı faktörlerin kategorizasyonunu içerdiğinden, araştırmacıların yorumları arasında farklılıklar oluştuğunda, teorik çerçeveye geri dönülerek görüş birliği sağlanmıştır. Tam bir mutabakata varmak için, ilk iki yazar veri analizinin ilk iki aşamasında 3-4 ay boyunca her hafta 1-2 saat süren toplantılarda birlikte çalışmış ve üç araştırmacı da her bir öğrencinin her bir problem için strateji seçiminde belirlenen faktörler üzerinde görüş birliğini sağlamak için toplantılarda yer almıştır. Dolayısıyla, birden fazla araştırmacının bakış açısının karşılaştırılması ve teori ile karşılaştırılması, güvenilirlik için üçgenleme çeşitlerini sağlamıştır (Lincoln ve Guba, 1985).

Bulgular

Bu bölümde ilk olarak, öğrencilerin üç tür toplama problemindeki (toplam bilinmeyen, birinci toplanan bilinmeyen, ikinci toplanan bilinmeyen) strateji seçimlerine dair genel bir değerlendirme sunulmuştur. Ardından, birinci sınıf öğrencilerinin toplama işlemi problemlerindeki strateji seçimlerinde rol oynayan etmenlere yer verilmiştir.

Öğrencilerin Strateji Seçimlerinin Genel Değerlendirmesi

Öğrencilerin çözümleri, alanyazında belirtilen stratejilere paralel olarak (örn. Clements vd., 2020; Fuson, 2003; Verschaffel vd., 2007), temelde bir bütünü oluşturmaya ya da parçalarına ayrıştırmaya dayanan altı stratejiyi ortaya koymaktadır. Bu stratejiler, Tablo 2'de özetlenmiş ve öğrencilerin her bir stratejisini yansıtacak şekilde araştırmacılar tarafından oluşturulan matematiksel ifadelere yer verilmiştir. Tüm bu stratejiler bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Tablo 2. Öğrenci stratejileri ve araştırmacılar tarafından oluşturulan matematiksel ifadeler

Stratejiler	Öğrenci stratejilerine dayalı matematiksel ifadeler	Stratejiyi kullanan öğrenciler
Üzerine Sayma	*Birinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu:* __ + 12 = 19 12 → 19 (13,14,15,16,17,18,19) *İkinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu:* 6 + __ = 13 6→13 (7,8,9,10,11,12,13); 6 + 7 = 13	Irmak Tilbe Ayaz Zehra
10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama	*Toplamın Bilinmediği Problem Durumu:* 12 + 9 = __ 12+9 = (11+1) + 9 = (11+9) + 1 = 20+1 = 21 *İkinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu:* 6 + __ = 13 (6 + 4) + 3 = 6 + (4+3) = 13 [4 + 3 = 7]	Metin Fuat Ayaz Zehra Irmak Tilbe
10'u kullanarak Sayıları Oluşturma (+ 10'a Tamamlama)	*Birinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu:* __ + 12 = 19 12 = 10 + 2; 10 + 9 = 19; 9 – 2 = 7 *Toplamın Bilinmediği Problem Durumu:* 12 + 9 = __ 12+9 = (10 + 2) + 9 = (9 + 2) + 10 = 11 + 10 = 21	Fuat Ayaz Irmak Tilbe
Önce Büyük olan Birlikleri Ele Alma (+ 10'a Tamamlama + Onlukları Göz Ardı Etme)	*Toplamın Bilinmediği Problem Durumu*: 12 + 9 = __ 12 + 9 = (10 + 2) + 9 = (10 + 9) + 2 = 19 + 2 = (19 + 1) + 1 = 20 + 1 = 21 *Birinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu*: __ + 12 = 19 12 = 10 + 2; (10 + 7) + 2 = 19 [7 + 3 = 10 → 7 + 2 = 9 çünkü 10 – 1 = 9]	Fuat Ayaz Zehra Metin
Onlukları Göz Ardı Etme ve Sayı Bağı İkililerini Kullanma	*Birinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu:* __ + 12 = 19 19 → 12; 9 – 2 = 7; 19 – 12 = 7	Metin
İki Katının Bir Fazlasını Alma	*İkinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu:* 6 + __ = 13 (6 + 6) + 1 = 12 + 1 = 13; 6 +1 = 7	Zehra Metin

Tablodan da anlaşıldığı üzere, öğrencilerin bu stratejileri her zaman bağımsız olarak kullanmadıkları görülmüştür. Bunun yerine, *10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama* stratejisinin *Önce Büyük olan Birlikleri Ele Alma* ve *10'u Kullanarak Sayıları Oluşturma* stratejilerine eşlik ettiği görülmüştür. Öğrencilerin birkaç stratejiyi uyumlu bir şekilde bir arada kullandığı çözümleri, her üç tür toplama probleminde de düşünme biçimlerinin karmaşıklığını ve bir taraftan da zenginliğini göstermektedir. Bu noktada, bu stratejilerin hiçbirinin öğretim sırasında öğrencilere öğretilmediğinin vurgulanması da gerekmektedir.

Belirli bir problem türünün belirli stratejileri destekleyip desteklemediğini derinlemesine incelemek için, problem türlerine göre öğrencilerin stratejilerini gösteren kod matrisi oluşturulmuştur (bkz. Tablo 3).

Tablo 3. Problem türlerine göre öğrenci stratejileri matrisi

Stratejiler	Toplama Probleminin Türü		
	Birinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu [__ + 12 = 19]	İkinci Toplananın Bilinmediği Problem Durumu [6 + __ = 13]	Toplamın Bilinmediği Problem Durumu [12 + 9 = __]
Üzerine Sayma	*	*	
10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama	*	*	*
10'u kullanarak Sayıları Oluşturma	*		*
Önce Büyük olan Birlikleri Ele Alma	*		*
Onlukları Göz Ardı Etme ve Sayı Bağı İkililerini Kullanma	*		
İki Katının Bir Fazlasını Alma		*	

Tablo 3 temel olarak analizin üçüncü aşamasında yapılan çapraz karşılaştırmalardan birini sunmaktadır. Dolayısıyla matris, seçilen birinci sınıf öğrencilerinin üç farklı türdeki toplama problemini çözmek için kullandıkları altı stratejiyi göstermekte ve toplama problemi türleri arasında değişen bir dizi stratejiye işaret etmektedir. Örneğin, *İki Katının Bir Fazlasını Alma* stratejisi yalnızca toplananlardan birinin 6 ve toplamın 13 olduğu ikinci toplananın bilinmediği problem durumunda gözlenmiş ve bu problemde öğrenciler 13'ün 6'nın iki katından bir fazlası olduğunu görebilmiştir. Benzer şekilde, toplamın bilinmediği problem durumunda öğrencilerin strateji seçimleri *10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama* ve *Önce Büyük olan Birlikleri Ele Alma* olmuştur. Toplamın bilinmediği problem durumunda, toplananlardan birinin [9] 10 sayısına yakın olması öğrencileri bu stratejileri kullanmaya yönlendirmiştir. Öte yandan, *İki Katının Bir Fazlasını Alma* dışındaki tüm stratejiler birinci toplananın bilinmediği problem durumunda gözlenmiştir. Dolayısıyla, toplama problemlerinin türleri arasındaki bu farklılık, problemlerin yapısının ve problemlerde yer alan sayıların rolünü işaret etmektedir. Bu nedenle, çalışmanın bundan sonraki kısmında birinci sınıf öğrencilerinin toplama problemlerindeki strateji seçimlerinde rol oynayan etmenler incelenmiştir.

Toplama Problemlerinde Öğrencilerin Strateji Seçimlerini Etkileyen Faktörler

Bu bölümde sunulan bulgular, Baroody ve Ginsburg'un (1986) öğrencilerin strateji seçimlerini etkileyen faktörlere ilişkin öne sürdüğü teorik çerçeve temelinde ele alınmıştır. Bu çerçeveye ek olarak, veri analizinde ortaya çıkan ek faktörler de göz önüne alınmış ve bir dizi çapraz karşılaştırmalı analizden elde edilen bulgularla birlikte kapsayıcı bir inceleme yapılmıştır.

Problemin Anlamsal Yapısı

Baroody ve Ginsburg'a (1986) göre, problemin anlamsal yapısı, problem durumunun doğası ile ilgilidir. Örneğin, birleştirme durumunun iki yapılı olarak kavranması veya değişim durumunun tek yapıdaki değişim olarak kavranması problemin anlamsal yapısı ile açıklanmaktadır. Problemlerin anlamsal yapısına ek olarak, bu çalışmada kullanılan üç tür toplama problem durumu da bu kapsamda ele alınmıştır: birinci toplananın bilinmediği problem durumu, ikinci toplananın bilinmediği problem durumu ve toplamın bilinmediği problem durumu. Dolayısıyla, her bir problem türünde toplama işleminin belirli bir yapısı ifade edilmektedir.

Bu çalışmada, öğlencilerin üzerinde çalıştığı birinci toplananın bilinmediği problemde, sınıftaki öğrenci sayısının 12 kişi daha geldiğinde 19 olması durumu vardır ki bu da tek bir yapının değişim durumunu içermektedir. Bu problemi çözmek için *Üzerine Sayma* stratejisini kullanan Tilbe, toplama ulaşana kadar ikinci toplananın üzerinde saymıştır. Aşağıdaki diyalog Tilbe'nin bu problemdeki akıl yürütmesini göstermektedir.

Görüşmeci: *Sınıfta ilk başta kaç kişi olduğunu nasıl buldun?*

Tilbe: *12 aklımızda. 12-13-14-15-16-17-18-19 (parmakları ile göstererek sayıyor).*

Bu kısa cevaptan da görüldüğü gibi Tilbe, verilen toplananın [12] üzerine- birinci veya ikinci toplanan olması fark etmeksizin- toplama [19] ulaşana kadar birer birer sayma yapmaktadır. Şekil 2'de Tilbe'nin bu problemdeki toplama işlemi ifadesi verilmiştir.

Şekil 2. Tilbe'nin birinci toplananın bilinmediği problemdeki toplama işlemi ifadesi

Problemde verilen ikinci toplanan 12 olmasına rağmen, Tilbe 12'nin üzerine saymış ve toplama işlemi ifadesinde 12'yi birinci toplanan olarak yazmıştır, dolayısıyla Tilbe'nin bu ifadesi yaptığı sayma işlemiyle uyumludur. Toplama işlemi ifadesi, toplananların sırasını dikkate almadan aynı kümedeki miktar değişimini (bir sınıftaki öğrenci sayısı değişimini) kavramsallaştırdığını göstermiştir. Bu bağlamda, anlamsal yapının tek kümedeki değişim durumu, öğrencinin toplama işlemindeki değişme özelliğini anlamlandırmasına örtük bir şekilde yardımcı olmuştur.

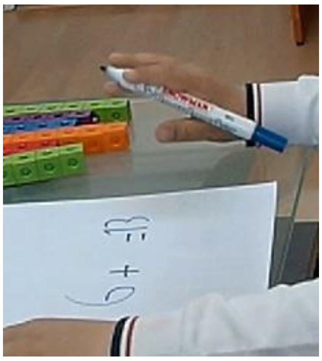
İkinci toplananın bilinmediği problem de aynı şekilde tek kümenin değişim durumunu içermektedir. Çünkü problemde Sude'nin oyuncaklarının sayısının (tek bir kümenin niceliğinin) annesinin ona biraz daha vermesiyle değişimi yer almaktadır. Fuat, birinci toplananın [6] ve toplamın [13] verildiği bu problemi çözmek için *10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama* stratejisini kullanmış ve çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

(Fuat hızlı bir şekilde 7cevabını veriyor)

Görüşmeci: *Nasıl bu kadar hızlı buldun?*

Fuat: *Şöyle buldum. 6 var. 6yı 10'a tamamladım, 4 ekledim. Sonra [10'a] 3 ekledim ve [13'e kadar] saydım.*

Görüldüğü gibi, öğrenci 10'un sayı bağı ikilisi olan 6 ve 4'ü kullanmış, 10'u elde etmek için verilen toplananın [6] üzerine 4 eklemiştir. Daha sonra 10'u referans alarak, 13'ü oluşturmak için 3 eklemiştir. *10'a Tamamlama* stratejisinin kullanıldığı çözümünün son aşamasında, 13'e ulaşmak için adım adım eklediği sayılar olan 4 ve 3'ü takip ederek 7'ye ulaşmıştır. Diğer bir deyişle, öğrenci problemde verilen toplama ulaşmak için, toplananları sayı bağı bilgisi ile uyumlu bir şekilde oluşturmaya çalışmıştır. Bu strateji basit gibi görünse de aslında sayılar arasında ilişkisel düşünmeyi gerektiren oldukça temel bir stratejidir. Fuat, bu toplama işlemi için Şekil 3'te gösterilen ifadeyi yazmıştır.



Şekil 3. Fuat'ın ikinci toplananın bilinmediği problemdeki toplama işlemi ifadesi

Fuat'ın stratejisi, problemin anlamsal yapısından, yani tekil yapılı değişim durumundan, etkilenmiştir. Fuat'ın toplama işlemi ifadesi, aynı zamanda problemin anlamsal yapısının bir başka yönünü de açığa çıkarmıştır. Daha açıkça belirtmek gerekirse, Fuat'ın yazdığı toplama işleminde problemde verilen sayı birinci toplanan ve verilmeyen ise ikinci toplanan olarak yer almaktadır. Dolayısıyla Fuat, bu toplama işlemini yazarken, problemde verilen sayıların sırasını gözetmiştir, ki bu da problemin anlamsal yapısının diğer yönünü göstermektedir. Özetlemek gerekirse, Fuat'ın stratejisi problemde verilen sayıların sırasına göre şekillenmiştir, çünkü birinci toplanan ile başlamış [6] ve toplamı oluşturmayı hedeflemiştir [13]. Bilinmeyen toplananı belirlemek için ise 10'u referans olarak kullanmış ve 10 yapan sayı ikililerini hatırlamıştır.

Bilişsel Ekonomi

Baroody ve Ginsburg (1986), öğrencilerin problem çözerken bilişsel olarak daha az yükü olan stratejileri veya zihinsel işlemleri tercih etme eğiliminde olduklarını ileri sürmektedir. Öğrencilerin *Önce Büyük olan Birlikleri Ele Alma* ve *Onlukları Göz Ardı Etme ve Sayı Bağı İkililerini Kullanma* stratejilerini tercih etmelerinde rol oynayan ana faktörlerden biri bilişsel ekonomi olmuştur. Katılımcı altı öğrenciden dördü (Fuat, Ayaz, Zehra ve Metin) bilişsel ekonomiye hizmet eden bu stratejileri kullanmıştır çünkü önce büyük birlikleri ona tamamlayıp sonra küçük birlikleri sayıya eklemek daha kolay gelmiştir. Örneğin, toplamın bilinmediği problemde (12 + 9 = __), Ayaz ve görüşmeci arasındaki diyalog *Önce Büyük olan Birlikleri Ele Alma* stratejisini Ayaz'ın nasıl kullandığını göstermektedir.

Görüşmeci: *Cevabı nasıl buldun?*

Ayaz: *12'den 2'yi çıkardım, sonra 9'u [10'a] ekledim. Sonra 1 daha ekledim, sonra 1 daha. 21 [yaptı].*

Görüşmeci: *Anladım, 12'yi 10 ve 2 diye ayırdın ve sonra 1 ekledin. 20 yaptı, sonra?*

Ayaz: *1 daha ekledim. Yani 9'u buraya (10'u gösteriyor) aldım, 12'deki 2'yi bir bir ekledim.*

Görüşmeci: *Peki, cevap ne oldu?*

Ayaz: *21 ağaç.*

Ayaz'ın açıklamasında görüldüğü gibi, önce birinci toplananı [12] 10 ve 2 olarak ikiye ayırıyor, ardından ikinci toplanandaki birlikleri [9] (birinci toplanandaki birliklerden [2] büyük olduğu için) 10'a ekliyor. Çözümün son adımı olarak da ilk toplanandaki birlikleri toplama ekliyor. Dolayısıyla, Ayaz bu stratejiyi *10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama* ve *10'u kullanarak Sayıları Oluşturma* stratejilerinden adapte ederek üretiyor. Ayrıca, Ayaz'ın stratejisi birleşme ve değişme özelliklerinin örtük olarak kullanılmasını içermektedir (örneğin, (10+2) + 9 = 10 + (2+9) = 10 + (9+2) = (10+9) + 2). Bu nedenle, önce daha büyük birlikleri toplama ekleyebilmek için sayılardan birinin onluk ve birliklere ayırması ve toplama işlemindeki toplananların değişme ve birleşme özellikleri açısından değerlendirmesi gerekmektedir. Üstelik bunları toplamanın değişme ve birleşme ilkelerini formal olarak öğrenmeden yapabilmesi dikkat çekici bir bulgu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Birinci toplananın sorulduğu problemde, Metin'in ikinci toplanandaki [12] ve toplamdaki [19] onlukları yok sayan bir strateji kullandığı gözlenmiştir. Bu strateji, Metin'in problemi tek basamaklı probleme dönüştürmesini sağlamıştır (yani, __ + 12 = 19 ←→ __ + 2 = 9). Başka bir deyişle hem verilen toplananda hem de toplamda aynı sayıda onluk olması, Metin'in onlukları göz ardı ederek problemin bilişsel yükünü azaltmasını sağlamıştır. Bu stratejiyi sadece bir öğrenci göstermiş olsa da, birinci toplananın bilinmediği toplama problemini çözmede işe yaradığı için kayda değer bir strateji olarak belirlenmişir. Metin ve görüşmeci arasında geçen aşağıdaki diyalog, onlukları görmezden gelmenin ve böylece yalnızca birliklere odaklanmanın Metin'in problemi çözmesinde nasıl işe yaradığını göstermektedir.

(Metin hızlıca "yedi" cevabını veriyor)

Görüşmeci: *7'yi nasıl bu kadar çabuk buldun?*

Metin: *Şimdi 9'dan 2 çıkardım, 7 kaldı.*

Görüşmeci: *Neden 9'dan 2 çıkardın?*

Metin: *Çünkü en kolayı o.*

Görüşmeci: *Peki, 12 ve 19'daki birlere ne oldu?*

Metin: *Onları düşünmeyince hızlı oldu.*

Görüşmeci: *Neden?*

Metin: *Çünkü 12'den 19'a gidiyoruz.*

Görüldüğü gibi, Metin hem verilen toplananın hem de toplamın aynı sayıda onluğa sahip olduğunu ve bu nedenle bilinmeyen toplananı bulmak için bu onlukların göz ardı edilebileceğini fark etmiştir. Bu strateji basit görünebilir ancak toplanan ile toplam arasında ilişkisel bir anlayış gerektirmesi açısından oldukça kavramsal bir sayı bilgisi gerektirmektedir. Daha detaylı ifade etmek gerekirse, Metin'in stratejisi toplanan ile toplamdaki aynı sayıda onlukları göz ardı etmenin problemdeki eşitliği bozmayacağını fark etmeyi gerektirmektedir, ki bu da erken cebir için temel adım olarak düşünülebilir.

Buna ek olarak, *10'a Tamamlama* ve *10'u kullanarak Sayıları Oluşturma* stratejileri bilişsel ekonomiye kavramsal ara adımlar olarak hizmet etmektedir. Örneğin, Ayaz ve Fuat, *10'u kullanarak Sayıları Oluşturma* stratejisini oldukça karmaşık bir yapıda kullanmıştır. Birinci toplananın bilinmediği problemde (__ + 12 = 19) Ayaz, oldukça ileri düzey olarak nitelendirilebilecek aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Görüşmeci: *Cevabı nasıl buldun?*

Ayaz: *12'den 2'yi çıkardım. 19'un 9'unu oraya (10) verdim) [bu da 19 eder].*

Görüşmeci: *Peki, 19'a ulaştın ama 7'yi nasıl buldun?*

Ayaz: *[12'deki] 2'yi 9'dan çıkardım, 7 buldum.*

Bu stratejide Ayaz onlukları görmezden gelmemiş, bunun yerine zihinsel olarak şu işlemleri yapmıştır: (i) 12'yi 10 ve 2'ye ayırmak için 12'nin sayı kombinasyonlarını kullanmış, (ii) 19'u (yani toplamı) elde etmek için, verilen toplanandan ayrıştırılan 10'a (yani 12'nin 10'u) 9 (yani toplamdaki birliklerin sayısını) eklemiş, (iii) verilen toplanandaki birliklerin sayısını toplamdaki birliklerin sayısından çıkararak düzenleme yapmış; yani, 9-2=7 ve (iv) 19'a ulaşmak için düzenleme sonucunun [7] 12'ye eklenmesi gerektiği sonucuna varmıştır. Görüldüğü gibi Ayaz'ın düşünme biçimi oldukça ileri düzeydedir.

Öte yandan, aynı problemi ileri düzey akıl yürütme yoluyla çözen tek öğrencinin Ayaz olmadığı gözlenmiştir. Fuat ile görüşmeci arasında geçen aşağıdaki diyalog, bir başka sofistike düşünme biçimini göstermektedir.

Fuat: *12'ye 7 eklersek 19 olur, bu yüzden başlangıçta 7 öğrenci vardı. 12'den 2'yi çıkardım ve 7'yi ekledim 10'a. 17 oldu. Sonra tekrar 2'yi ekledim 19 oldu.*

Görüşmeci: *Güzel. Peki 7'yi nasıl buldun?*

Fuat: *Şöyle buldum. 7'ye 2 ekledim 9 olacağını anladım ve o yüzden 7 olduğunu anladım.*

Görüşmeci: *7 ile 2'nin 9 yapacağını nasıl anladın hemen?*

Fuat: *Çünkü 7, 3 daha 10 ediyor ve 1 azalttığımda 9 ediyor çünkü 9 10'dan bir önce geliyor. Bu yüzden 7, 2 daha 9 ediyor. Böyle 9'u buldum. Burada da (12'de) 10 var, 9'a 10'u ekliyorum 19 ediyor.*

Ayaz'ın strateji seçimi gibi, Fuat da ikinci toplananı [12] 10 ve 2 olarak ayrıştırarak işe başlamış ve bilinmeyen toplananın 7 olduğunu hızlıca bulmuştur. Çünkü Fuat da 9'un sayı ikilileri olarak 7 ve 2'yi hızlıca belirleyebilmiştir, ki bu da 10'u oluşturan sayı bağı ikilileri bilgisinden kaynaklanmaktadır (7 ve 3 sayı ikilisi 10 yaptığından, 7 ve 2 sayı ikilisi de 9 yapar). Dolayısıyla, 19'u elde etmek için 7+2'nin 10'a eklenmesi gerektiğini, yani 19 elde etmek için 7'nin 12'ye eklenmesi gerektiğini düşünebilmiştir. Fuat'ın 9'u oluşturan 7 ve 2 sayı ikilisini hızlıca fark etmesi, Ayaz'ın stratejisinde izlediği ikinci adımı atlamasını sağlamıştır ki bu da Fuat'ın sayı kombinasyonu bilgisini akıcı bir şekilde kullanmasıyla mümkün olmuştur. Başka bir deyişle, sayılar arasındaki ilişkinin hızlı bir şekilde fark edilmesi, seçilen stratejilerde bilişsel yükün azalmasına hizmet etmiştir.

Toplamın bilinmediği problem durumunda (12 + 9 = __) Metin'in *10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama* stratejisini içeren çözümü aşağıda verilmiştir.

Görüşmeci: *Cevabı nasıl buldun?*

Metin: *12'den 1 çıkardım. 11 oldu. Onun yerine 9 ekledim [11'e] ve 20 oldu. Sonra, 1 daha ekledim [20'e], 21 oldu.*

Metin, önce birinci toplananı [12] 11 ve 1 olarak sayı ikilisine ayrıştırmıştır; çünkü 11'e ikinci toplananı [9] eklediğinde onun katını kolayca elde edebileceğinin farkındadır. Diğer bir deyişle Metin, birinci toplananı akıcı bir şekilde daha uyumlu bir sayıya dönüştürmeyi tercih etmiştir. 1'i aklında tutarak 11'i ikinci toplanan ile birleştirmiş ve 20 elde etmiştir. Dolayısıyla 10'un katlarını oluşturan sayı kombinasyonlarına dayalı bilgisinin, toplamı bulmasına yardımcı olduğu gözlenmiştir. Stratejinin son aşamasında ise Metin, aklında tuttuğu 1'i 20'ye ekleyip sonucu bulmuştur.

Irmak'ın stratejisi, toplamın bilinmediği problem için ikinci ve farklı bir örnek olarak karşımıza çıkmaktadır.

Görüşmeci: *Cevabı nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

Irmak: *12'yi 10 ve 2 olarak düşündüm. Bu 2'yi 9 'a ekledim sonra 11 oldu.*

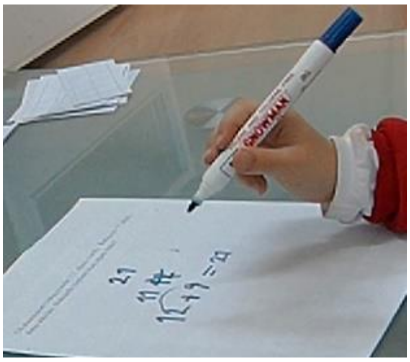
Görüşmeci: *Görebildiğim kadarıyla, sen oraya (kağıdı gösteriyor) 12 yazdın.*

(Irmak 12'nin yanına 11 yazdı. Sonra 12'nin üzerini çizdi)

Görüşmeci: *Evet, 2'ye 9 ekledin ve 11 oldu, pek, sonra?*

Irmak: *Sonra buradaki (12'yi gösteriyor) 10'u aldım, bu ikisinin toplamıyla [11] birleştirdim, yani topladım.*

Yukarıdaki diyalog, Irmak'ın basamak değeri kavramını kullanarak ve 10'u referans alma yoluyla 12'yi 10 ve 2 olarak ayrıştırdığını göstermektedir. Daha sonra birlikleri birleştirmiş ve aşağıdaki toplama işlemi ifadesinde de görüldüğü üzere toplam 11'e ulaşmıştır (Şekil 4).



Şekil 4. Irmak'ın toplamın bilinmediği problemdeki toplama işlemi ifadesi

Irmak, çözümünün son adımı olarak birinci toplanandaki 10'u, toplama eklemiştir. Irmak'a 10 ve 11'i nasıl topladığı sorulduğunda, sayıyı onlar ve birler olarak ikiye ayırdığını ve önce onlukları sonra birlikleri topladığını ifade etmiştir. Öğrencinin çözüm sürecindeki muhakeme sürecinden, onluk ve birlik sıralamasından bağımsız olarak birlikler ve onluklarla çalışabildiği anlaşılmaktadır. Diğer bir deyişle, önce 10'u kullanarak 11'i (yani (9+1) + 1) oluşturmuş, sonra da 10'u kullanarak 21'i (yani (10+1) + 10 = (10+10) + 1) oluşturmuştur. Dolayısıyla, Irmak'ın stratejisi 21'i oluşturmak için *10'u kullanarak Sayıları Oluşturma* stratejisini içermektedir. Bu problemde Irmak, 10'u kullanarak herhangi bir sayıyı dört şekilde oluşturabileceğini göstermiştir: (a) *bir sayıyı onluk ve birliklere ayırma* (örneğin, 12, 10 ve 2'dir), (b) 10'un sayı ikililerini dikkate alarak *10'a tamamlama* (örneğin, 9 ve 1, 10 yapar), (c) *10'un katlarını oluşturma* (örneğin, 10 ve 10, 20 yapar) ve (d) *10'u ve katlarını kullanarak herhangi bir sayıyı oluşturma* (örneğin, 21, 20 ve 1'dir). Herhangi bir sayıyı oluşturmak için 10'u (ve katlarını) esnek bir şekilde kullanmasını sağlayan bu dört farklı yol, 11+10 toplama işlemini zihinden yapabilmesini sağlamıştır. Dahası, bu süreç onun (10+1)+10 ile (10+10)+1 işlemsel süreçlerinin aynı niceliğe denk gediğini görmesini sağlamıştır ki bu da örtük olarak değişme ve birleşme özelliklerini işaret etmektedir. Her ne kadar öğrencinin toplamanın bu ilkelerini kavradığını iddia etmesek de *10'a tamamlama* ve *10'u kullanma* stratejilerini esnek bir şekilde kullanması ilişkisel düşünmesini sağlamıştır. Ayrıca, 10'u kullanarak bir sayıyı birden fazla şekilde oluşturması bilişsel ekonomiye katkıda bulunmuştur.

Problemdeki Sayıların Büyüklüğü Değil, Problemde Hangi Sayıların Kullanıldığı: Strateji Seçimi Çerçevesi için Uyarlanmış Bir Faktör

Baroody ve Ginsburg'un (1986) strateji seçimi teorik çerçevesi, problemdeki sayıların büyüklüğünü öğrencilerin stratejilerini etkileyen üçüncü faktör olarak ele almaktadır. Bu çalışmada "problemde kullanılan sayılar" olarak adlandırdığımız farklı ama ilişkili bir faktör daha olduğu gözlenmiştir. Başka bir deyişle, problemdeki sayıların büyüklüğü değil, problemde bilinçli ve stratejik olarak seçilmiş sayıların (20'den küçük sayılar olsa bile) öğrencilerin strateji seçimlerini etkileme potansiyeline sahip olduğu görülmüştür.

Yukarıda, *10'a Tamamlama* stratejisinin temel ve kavramsal bir strateji olduğundan ve *10'u kullanarak Sayıları Oluşturma* ve *Önce Büyük olan Birlikleri Ele Alma* gibi diğer stratejilere zemin oluşturduğundan bahsedilmişti. Problemlerde kullanılan sayıların bilinçli seçimi öğrencileri *10'a Tamamlama* stratejisini kullanmaya yönelttiği ve dolayısıyla onların strateji seçiminde rol aldığı görülmüştür. Örneğin, ikinci toplananın bilinmediği problemde (6 + __ = 13), ilk toplanan [6] kasıtlı olarak 10'a yakın verilmiştir ve Fuat'ın "6 ve 4, 10 eder" şeklinde ifade ettiği sayı kombinasyonları bilgisini kolayca aktifleştirmesini sağlamıştır. Daha sonra, 10 sayısını, herhangi bir onlu sayı [13] oluşturmak için kullanmıştır ki bu da birler basamağı on olan sayıları öğrenirken sahip olduğu bir başka sayı kombinasyonu pratiğidir (yani, 10 ve 3, 13 yapar). Dolayısıyla, problemdeki sayıların bilinçli ve amaçlı seçilmesi, bu çalışmadaki beş öğrencinin ilişkisel ve geçişli düşünmesini sağlamış (örneğin, 10, 6'dan 4 fazladır, 13 ise 10'dan 3 fazladır ve dolayısıyla 13, 6'dan 4+3 fazladır) ve strateji seçimlerinde rol oynamıştır. Aynı problemde Metin ve Zehra sayı kombinasyonu bilgilerine dayanarak *İki Katının Bir Fazlasını Alma* stratejisini kullanmıştır. Bu öğrenciler "6 ve 6'nın 12 ettiği" bilgisini kullanmış ve toplananı bir artırmıştır (yani 6+1), bu da toplamın bir artmasına (yani 12+1) neden olmuştur. Dolayısıyla, problemde yer alan sayılar, öğrencilerin *İki Katının Bir Fazlasını Alma* stratejisini seçmelerinde rol oynamış ve ayrıca onları toplanan ile toplamın büyüklüğü arasında ilişkisel düşünmeye yönlendirmiştir.

Birinci toplananın bilinmediği problem durumunda (__ + 12 = 19), Ayaz ve Fuat'ın ileri düzey çözüm stratejileri yukarıda sunulmuştur. Bu çözümler temel olarak *10'a (ve/veya 10'un katlarına) Tamamlama* ve *10'u kullanarak Sayıları Oluşturma* stratejilerine dayanmaktadır ki bu da problemde kullanılan sayılardan oldukça etkilenmektedir. Daha açıkça ifade etmek gerekirse, hem verilen toplananın [12] hem de toplamın [19] ondan büyük sayı olması, öğrencilerin bir dizi birleşim ve ayrıştırma yapmasına olanak sağlamıştır. Ayrıca, sayılardaki onluklarının eşit olması, toplanan ve toplamda verilen sayıların birliklerini farklı ele almalarına imkân sağlamıştır. Dolayısıyla, problemde kullanılan sayılar, sadece öğrencilerin strateji seçimlerini etkilemekle kalmamış, aynı zamanda strateji yelpazesini genişletmiş ve bazen de ortaya çıkan stratejilerdeki kavramsal zenginliği artırmıştır. Örneğin, aynı problemde Metin'in onlukları görmezden gelerek problemi tek basamaklı bir toplama işlemine dönüştürdüğü gözlemlenmiştir. Hem verilen toplananda [12] hem de toplamda [19] aynı sayıda onluk bulunduğundan, Metin problemin bilişsel yükünü azaltmak için bu onlukları yok saymıştır ki bu düşünme biçimi problemde yer alan sayıların bilinçli seçimleriyle mümkün olmuştur. Benzer şekilde, toplamın bilinmediği problemde (yani, 12 + 9 = __) verilen sayılar altı öğrencinin de strateji seçimlerini etkilemiştir. Başka bir deyişle, kasıtlı olarak bir sayının ondan biraz fazla [12] ve diğer sayının ondan biraz az [9] olması öğrencileri *10'u kullanma* stratejisine yönlendirmiştir.

Dolayısıyla, problemde kullanılan sayılar, bu sayılar büyük sayılar olmasa veya toplananlardan biri diğerinden önemli ölçüde büyük olmasa bile (yani problemdeki sayıların büyüklüğünden bağımsız olarak) öğrencilerin strateji seçimlerinde rol oynamıştır. Baroody ve Ginsburg'un (1986) strateji seçimi çerçevesi üçüncü faktör olarak *problemdeki sayıların büyüklüğüne* odaklandığından, problemde yer alan sayılara ilişkin analiz bu üçüncü faktör ile tam olarak örtüşmemiştir. Bu nedenle, bu faktör *problemde kullanılan sayılar* açısından ele alınarak genişletilmiş ve yeni bir faktör olarak teorik çerçeveye uyarlanmıştır.

Tartışma ve Sonuç

Bir önceki bölümde, birinci sınıf öğrencilerinin toplama işlemi problemlerinde strateji seçiminde rol oynayan faktörlere dair bulgular paylaşılmıştır. Öğrencilerin bu çalışmada geliştirdikleri stratejilerin (bkz. Tablo 3), diğer çalışmalarda (ör. Baroody vd., 2015; Clements vd., 2020; Fuson, 1992; Guerrero ve Palomaa, 2012; Paliwal ve Baroody, 2020) gözlemlenen stratejilerle uyumlu olduğu görülmüştür. Bu çalışmada yer alan öğrencilerin bazı stratejileri birleştirerek esnek bir şekilde kullanmaları ise alanyazında yer alan stratejilerin ötesine geçmiştir, ki bu da öğrencilerin strateji seçimlerinin önemli bir yönü olarak ortaya çıkmaktadır (Russo ve Hopkins, 2018; Sunde ve Sunde, 2019).

Çalışmanın bulguları, Mulligan'ın (2004) bazı stratejilerin belirli problem türlerinde daha etkili olduğu yönündeki savını desteklemektedir. Tablo 3'te görüldüğü gibi, birinci toplananın bilinmediği problem türü diğer problem türlerine göre daha fazla strateji ortaya çıkarmıştır. Birinci toplananın bilinmediği problem türünün genel olarak öğrenciler tarafından daha zorlayıcı olduğu (Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013) düşünüldüğünde öğrencilerin zor problemin bilişsel yükünü azaltmaya ihtiyaç duydukları için, daha fazla strateji ürettikleri söylenebilir. Bu açıdan, öğrencilerin yaşadığı bilişsel zorluk onları bilişsel ekonomiye yönlendirmiştir. Çalışmanın bulguları bir yandan Kayhan-Altay'ın (2023) çalışmasındaki bulgularla örtüşmezken, diğer yandan onları desteklemektedir. Kayhan-Altay'ın (2023) çalışmasında 2., 3. ve 4. sınıf öğrencileri toplamın bilinmediği problemlerde daha iyi performans gösterirken; mevcut çalışmada birinci sınıf öğrencilerinin birinci toplamın bilinmediği problemde (toplamın bilinmediği problem türüne kıyasla) daha fazla strateji geliştirmeleri bir çelişki oluşturmuştur. Öte yandan bu durum, öğrencilerin birinci toplananın sorulduğu problemde daha çok zorlandıklarını göstermektedir. Bu durum, Kayhan-Altay'ın (2023) çalışmasındaki öğrencilerin toplamın bilinmediği problem yapısında daha iyi performans gösterdikleri yönündeki bulguyu desteklemektedir.

Bu çalışma ayrıca bilişsel ekonomi perspektifinin detaylandırılmasına olanak sağlayan bulgular sunmuştur. Daha açık bir ifadeyle, kavramsal ve ilişkisel anlamaya dayalı stratejilerin problemin bilişsel talebini azaltmaya katkıda bulunduğu görülmüştür. Sayı kombinasyonlarının esnek kullanımı ve genellikle 10'u oluşturan sayı bağı ikililerinin kullanılması öğrencilerin zihinsel stratejilerini bilişsel olarak desteklemiştir. Hatta, dışarıdan karmaşık gibi görünen çözümlerin bazı öğrenciler için nispeten daha az bilişsel zorlayıcılığı olduğu görülmüştür. Dolayısıyla, bu öğrenciler stratejilerinde sayı ikililerini kullanarak birleştirme ve ayrıştırma içeren zihinsel işlemleri daha rahat bir şekilde yapabilmiştir. Diğer bir deyişle, sayı kombinasyonu bilgisinin öğrencilerin ilişkisel düşünmeleri için kavramsal bir bağlantı oluşturduğu ve bunun da problemin bilişsel yükünü azalttığı görülmüştür. Sayı kombinasyonu ailesi bilgisinin sayıların parça-parça-bütün ilişkilerine dayandığı düşünüldüğünde, çalışmanın bulguları Ding ve Auxter'in şu argümanı ile tutarlıdır (2017, s. 88): "Parça-bütün yapısının tam olarak anlaşılması, problemde verilen ve verilmeyen parçaların belirlenmesinde esneklik sağlar." Bu bulgu, sayıların ilişkisel olarak anlaşılmasının strateji geliştirme için kavramsal bir temel olduğunu iddia eden çalışmaları da desteklemektedir (örneğin, Chu vd., 2018; Kayhan-Altay, 2023; Schiffman ve Laski, 2018).

Bu durum araştırmasındaki birinci sınıf öğrencilerinin toplama problemlerini çözmek için geleneksel algoritmaları kullanmaması ilginç bir bulgudur, ancak strateji gelişiminin desteklenmesi açısından umut verici olarak değerlendirilebilir. Öğrencilerin standart algoritma kullanmaması öğretim sürecinde kullanılan varsayımsal öğrenme rotasının yapısından kaynaklanıyor olabilir. Varsayımsal öğrenme rotası temel olarak toplama ve çıkarma problemlerinin çözümünde alternatif stratejilerin kullanımı yoluyla öğrencilerin kavramsal anlamalarını geliştirmeye odaklanmıştır. Yöntem bölümündeki öğretim sürecinde de açıklandığı gibi, bu çalışmadaki öğrencilere toplama işlemi hem yatay hem de dikey ifade gösterimleri ile öğretilmiştir; ancak öğrencilerin hepsi yatay gösterimi kullanmayı tercih etmiş, yani standart algoritmayı kullanmamıştır. Bu sonuç, Kayhan-Altay'ın (2023) çalışmasındaki 2., 3. ve 4. sınıf öğrencilerinin çoğunlukla standart algoritma kullanma eğiliminde olması ile çelişmektedir. Ancak, bunun nedeni problemlerde yer alan sayılardan kaynaklanıyor olabilir. Özellikle, problemlerde yer alan sayılar birinci sınıf matematik öğretim programında (MEB, 2018) önerildiği gibi 20'den küçük seçilmiştir ve bu nedenle öğrencilerin standart algoritmayı kullanmalarına gerek kalmamış olabilir. Bir diğer neden ise sınıf seviyeleri arttıkça öğrencilerin standart algoritma ile ilgili deneyimlerinin artması ve bu nedenle öğrencilerin bu yönteme daha aşina olmaları olabilir. Güç ve Hacısalihoğlu (2016), öğrencilerin aşina oldukları stratejileri kullanmaya istekli olduklarını, bu nedenle üst sınıflarda geleneksel algoritmaya ne kadar aşina olurlarsa o kadar fazla kullanabileceklerini iddia etmiştir. Bütüner (2020), ülkemizde kullanılan 3. ve 4. sınıf matematik ders kitaplarının Singapur ders kitaplarına kıyasla strateji geliştirme için daha az fırsat içerdiğini ve standart algoritma yöntemlerine daha fazla yer verdiğini belirtmektedir. İlkokulun üst sınıflarında daha yoğun olan bu durum öğrencilerin standart algoritmalara olan eğilimini de etkileyebilir. Zira bizim çalışmamızdaki birinci sınıf öğrencilerinin henüz standart algoritmaya bu aşinalığı geliştirmemiş olmaları, algoritma dışındaki diğer stratejileri kullanma eğiliminde olmalarını açıklayabilir.

Birinci sınıf öğrencilerinin farklı anlamsal yapılara sahip toplama problemlerinde kullandıkları stratejilerin yüksek oranda birleştirme ve ayrıştırmaya, yani sayıların parça-parça-bütün ilişkisine, dayalı olduğu görülmüştür. Bu beklenen bir durum olarak görünebilir ancak Güç ve Hacısalihoğlu (2016) ortaokul öğrencilerinin bile zihinden toplama problemlerinde ayrıştırma kullanmakta zorlandıklarını rapor etmiştir. Öte yandan, öğrenciler parça-parça-bütün ilişkisini bir kez kavramsallaştırdıklarında, bu durum bilişsel ekonomiye daha fazla katkı sağlamaktadır. Bizim çalışmamızdaki birinci sınıf öğrencilerinde ve Duran ve diğerlerinin (2016) ortaokul öğrencilerinde gözlemlediği gibi, öğrenciler sıklıkla birleştirme ve ayrıştırma içeren stratejiler geliştirmektedir.

Bu çalışmanın bir diğer önemli katkısı da Baroody ve Ginsburg'un strateji seçimi çerçevesindeki problemin anlamsal yapısı faktörünün genişletilmesidir. Anlamsal yapının sadece durumun yapısıyla değil, aynı zamanda toplama işleminin yapısıyla (birinci toplananın bilinmediği, ikinci toplananın bilinmediği ve toplamın bilinmediği bir yapı olup olmamasıyla) ve problemde verilen sayıların sıralamasıyla da ilişkili olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu çalışmanın bulguları, Baroody ve Ginsburg'un çerçevesindeki faktörün içeriğini (i) orijinal çerçevedeki faktör olan anlamsal yapının durumsal yönü, (ii) anlamsal yapının işlemsel yönü ve (iii) anlamsal yapının sayı sırası yönü olarak katmanlara ayırarak genişletmiştir. Anlamsal yapının durumsal yönü, durumun ikili/tekli yapıya sahip birleşim ya da değişim durumu olup olmadığıyla ilgiliyken, anlamsal yapının işlemsel yönü toplama işlemindeki bilinen ve bilinmeyen niceliklerle ilgilidir. Son olarak sayı sırası yönü ise problemde birinci toplananın ve ikinci toplananın sırasıyla bu sırada belirtilip belirtilmediğini göstermektedir. Öğrencilerin toplama işlemi ifadelerinde özellikle sayıların sırası boyutu göze çarpmaktadır. Toplama işlemi ifadeleri yazılırken, problemde belirtilen sayıların sırası öğrencilerin strateji seçimlerini etkilediği görülmüştür.

Baroody ve Ginsburg'un (1986) strateji seçimi çerçevesi, *problemdeki sayıların büyüklüğü* adı verilen üçüncü bir faktör içermektedir. Diğer çalışmalarda sayıların büyüklüğünün, özellikle tek basamaklı sayıya kıyasla daha büyük sayılar kullanarak öğrencilerin strateji seçimlerindeki rolü incelenmiştir (örneğin, Guerrero ve Palomaa, 2012; Verschaffel vd., 2007). Örneğin 4+22 sorusu için toplananlardan birinin daha büyük olması, öğrencilerin daha büyük olan ikinci toplananın üzerine saymayı seçmelerine yol açmıştır (Baroody ve Ginsburg, 1986), ki burada da nihai amaç bilişsel yükü azaltmaktır. Bu nedenle, problemdeki sayıların büyüklüğü faktörünü bilişsel ekonomi faktörüyle ilişkili olarak değerlendirmek yerinde olacaktır. Bu çalışmada öğrencilere yöneltilen toplama problemleri, öğretim programının kısıtlaması (MEB, 2018) nedeniyle 1-20 arasındaki sayıları içerdiğinden ve problemlerde verilen sayılar birbirine yakın olduğundan, problemdeki sayıların büyüklüğü öğrencilerin strateji seçimlerinde etkili bir faktör olarak belirmemiştir. Dolayısıyla, birinci sınıf öğrencilerimizin strateji seçimlerinde problemdeki sayıların büyüklüğünün etkili olmamasının olası nedenin ulusal müfredat içeriği, yani problemdeki sayıların 1-20 arasında sınırlandırılmış olması olarak görülmektedir. Ancak çalışmanın bulguları, öğrencilerin çözümlerinde ortaya çıkan bu faktörle ilişkili diğer bir faktörü işaret etmektedir: *problemde kullanılan sayılar*. Dolayısıyla bu çalışma, problemlerde yer alan sayılarla ilgili olan ancak sayıların büyüklüğünü dikkate almak zorunda olmayan bir faktörün çerçeveye uyarlanmasını önermektedir. Her üç tür toplama probleminde de problemde verilen sayıların neredeyse tüm stratejiler için (sayma hariç) öğrencilerin strateji seçimlerinde etkili bir faktör olduğu görülmüştür. Diğer bir deyişle, problemde kasıtlı ve amaçlı olarak kullanılan sayıların öğrencilerin strateji seçimlerine yön verme potansiyeline sahip olduğu gözlemlenmiştir. Her ne kadar Pongsakdi ve diğerlerinin (2020) çalışması problemdeki sayıların zorlayıcı bir problem yaratmada belirleyici olmadığını gösterse de, aritmetik problemleri çözmede önemli bir faktör olduğu ortaya çıkmıştır. Baroody ve Ginsburg'un (1986) üçüncü faktörü, Pongsakdi ve diğerlerinin (2020) çalışmasının sonucu ve mevcut çalışmanın sonucu birlikte değerlendirildiğinde, problemde kullanılan sayıların mutlaka kolay veya zor problemler üretmeyebileceği, ancak öğrencilerin problemin bilişsel yükünü azaltmayı amaçlayan aritmetik stratejilerini yönlendirebileceği anlaşılmaktadır.

Son olarak, belirli bir stratejiye ilişkin yönlendirici bir öğretim olmaksızın öğrencilerin çeşitli stratejiler geliştirmesini destekleyen öğrenme ortamlarının önemi anlaşılmaktır (Schiffman ve Laski, 2018; Sievert vd., 2019; Sunde ve Sunde, 2019; Torbeyns vd., 2005). Benzer şekilde, araştırmalar ders kitapları ve araç gereçlerin strateji geliştirmede rol oynadığını göstermiştir (Kalaycıoğlu Akis ve Şahin, 2023; Üstündağ ve Özçakır Sümen, 2023). Bu bağlamda, bu çalışma, birinci sınıf öğrencilerinin strateji seçimlerindeki esnekliğini destekleyen bilişsel materyaller olarak sayı bağları yapısını kullanarak sayı kombinasyon ailelerine odaklanan bir öğretim sürecini içermektedir. Öğretim sürecinde, öğrenciler belirli stratejileri kullanmaya yönlendirmemiş ya da öğrencilere strateji temelli bir öğretim vermemiştir. Ancak sayı kombinasyonlarına odaklanmanın birinci sınıf öğrencilerinin birden fazla stratejiyi bir arada kullanmalarına kapı açtığı görülmüştür, ki bu da Mulligan'ın (2004) bu konudaki argümanını desteklemektedir. Her ne kadar strateji odaklı olmasa da öğrencilerin sayılar arasındaki ilişkileri vurgulayan ve stratejik zenginliği önemseyen bir öğretim sürecine dahil olmaları; onların düşüncelerini etkilemiş ve aritmetik öğrenmelerini geliştirmiş olabilir (Chu vd., 2018; Clements vd., 2020). Ayrıca, öğrencileri stratejileri kullanmada yetkin ve esnek hale getirmiş olabilir.

Sınırlılıklar ve Öneriler

Bu çalışma, matematik eğitimi uygulamaları ve matematik eğitimi araştırmaları açısından çeşitli implikasyonlar ortaya koymaktadır. İlk olarak, öğrencilerin toplama problemlerindeki stratejileri temelde sayı kombinasyonları ya da sayı ikilileri bilgisine dayanmaktadır. Bu nedenle, öğretmenlere öğrencilerin toplama işlemi stratejilerini zenginleştirmek için esnek bir sayı kombinasyonları bilgisine sahip olmalarını sağlayacak istikrarlı bir öğretim süreci planlamaları önerilmektedir. İkinci olarak, bu çalışmadaki öğrencilerin strateji seçimleri problemin anlamsal yapısından, bilişsel ekonomiden ve problemde kullanılan sayılardan etkilenmiştir. Bu faktörler arasında bilişsel ekonomi, öğrencilerin sayı kombinasyonlarını strateji geliştirme için kavramsal bir bağlantı olarak kullanmalarıyla ilgili olarak ortaya çıkmıştır ve bu da öğrencilerin sayı kombinasyonları bilgisinin desteklenmesinin önemini bir kez daha işaret etmektedir.

Buna ek olarak, problemlerde yer alan sayılar öğrencilerin strateji seçimlerini büyük ölçüde etkilemiştir. Bu bağlamda, öğretmenlerin öğrencilerin toplama stratejilerinde sadece problem türlerinin değil, problemlerde verilen sayıların da rol oynadığının farkında olmaları önemlidir. Ayrıca bu durum, program geliştiricilere ve ders kitabı yazarlarına matematik problemleri yazarken strateji seçimi çerçevesini dikkate alma konusunda bilgi sunmaktadır. Öğretmenlerin, öğrencilerin stratejilerini etkileyen olası faktörlerin ve öğrencilerin stratejik yeterliliklerini geliştirmek için bu faktörleri nasıl düzenleyebileceklerinin farkında olmaları önerilmektedir. Zira, öğrencilerin stratejik yeterliliklerini geliştirmelerinin anahtarı öğretmenlerdir (Durkin vd., 2017).

Öte yandan, bu çalışma sadece altı birinci sınıf öğrencisi ve üç toplama işlemi problemi ile sınırlıdır. Öğrencilerin strateji seçimlerini etkileyen faktörlerin daha geniş bir öğrenci grubuyla ve her bir toplama problemi türünde çeşitli problemlerle araştırılması ilerideki çalışmalar kapsamında ele alınabilir. Son olarak, çıkarma problemlerindeki öğrenci stratejilerinin ve strateji seçimlerini etkileyen faktörlerin araştırılması ve ortaya çıkacak faktörlerin bu çalışmadaki faktörlerle karşılaştırması da alana katkı sağlayacaktır.

Teşekkür

Bu çalışmanın bulguları, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 116K078 numaralı hibe ile desteklenen bir araştırma projesine dayanmaktadır. İfade edilen görüşler yazarlara aittir ve TÜBİTAK'ın görüşlerini temsil etmemektedir.

Kaynakça

Bacakoğlu, T. Y. ve Tertemiz, N. I. (2022). Students' mental addition strategies and the effects of strategy training: A longitudinal study. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *14*(4), 557-572. https://iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/1823 adresinden erişildi.

Bailey, D. H., Littlefield, A. ve Geary, D. C. (2012). The co-development of skill at and preference for use of retrieval-based processes for solving addition problems: Individual and sex differences from first to sixth grades. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(1), 78-92. doi:10.1016/j.jecp.2012.04.014

Baroody, A. J. ve Ginsburg, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* içinde (s. 75-112). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.Baroody, A. J., Purpura, D. J., Eiland, M. D. ve Reid, E. E. (2015). The impact of highly and minimally guided discovery instruction on promoting the learning of reasoning strategies for basic add-1 and doubles combinations. *Early Childhood Research Quarterly*, *30*, 93-105. doi:10.1016/j.ecresq.2014.09.003

Bütüner, S. Ö. (2020). Türk ve Singapur matematik ders kitaplarının zihinden hesaplama konusunda kullanılan stratejiler açısından karşılaştırılması. *Turkish Journal of Mathematics Education, 1*(1), 79-112. https://tujme.org/index.php/tujme/article/view/14/6 adresinden erişildi.

Carpenter, T. P. ve Fennema, E. H. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Educational Research, 17*(5), 457. doi:10.1016/S0883-0355(05)80005-9

Carpenter, T. P., Fennema, E. ve Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal, 97*(1), 3-20. doi:10.1086/461846

Carpenter, T. P., Moser, J. M. ve Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(4), 345-357. doi:10.5951/jresematheduc.19.4.0345

Chu, F. W., Rouder, J. ve Geary, D. C. (2018). Children's early understanding of number predicts their later problem-solving sophistication in addition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *169*, 73-92. doi:10.1016/j.jecp.2017.12.010

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it?. *Teaching Children Mathematics*, *5*(7), 400-405. doi:10.5951/TCM.5.7.0400

Clements, D. H. ve Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* içinde (s. 461-555). Kuzey Carolina: Information Age Publishing.

Clements, D. H. ve Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2. bs.). New York: Taylor & Francis.

Clements, D. H., Sarama, J., Baroody, A. J. ve Joswick, C. (2020). Efficacy of a learning trajectory approach compared to a teach-to-target approach for addition and subtraction. *ZDM Mathematics Education, 52,* 637-648. doi:10.1007/s11858-019-01122-z

Cowan, R. (2003). Does it all add up? Changes in children's knowledge of additioncombinations, strategies, and principles. A. J. Baroody ve A. Dowker (Ed.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* içinde (s. 35–74). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Çakıroğlu, E., Işıksal-Bostan, M. ve Sevinç, Ş. (2019). İlkokul 1. sınıf matematiği, sayılar ve işlemler ünitesi için gerçekçi matematik eğitimine dayalı öğrenme rotası geliştirilmesi: Bir tasarım araştırması (İlk adım projesi). https://search.trdizin.gov.tr/tr/yayin/detay/620663/ adresinden erişildi.

Ding, M. ve Auxter, A. E. (2017). Children's strategies to solving additive inverse problems: A preliminary analysis. *Mathematics Education Research Journal, 29*, 73-92. doi:10.1007/s13394-017-0188-4

Duran, M., Doruk, M. ve Kaplan, A. (2016). Ortaokul öğrencilerinin zihinden hesaplama yaparken kullandıkları stratejiler. *Elementary Education Online*, *15*(3), 742-760. doi:10.17051/io.2016.00048

Durkin, K., Star, J. R. ve Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: Lessons learned and next steps. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 585-597. doi:10.1007/s11858-017-0853-9

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* içinde (s. 243-275). New York: Macmillan.

Fuson, K. (2003). Developing mathematical power in whole number operations. J. Kilpatrick, W. G. Martin ve D. Schifter (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* içinde (s. 68-94). Reston, Virginia, ABD: National Council of Teachers of Mathematics.

Guerrero, S. M. ve Palomaa, K. (2012). First-grade methods of single-digit addition with two or more addends. *Journal of Research in Childhood Education*, *26*(1), 1-17. doi:10.1080/02568543.2012.633841

Güç, F. ve Hacısalihoğlu, M. (2016). Ortaokul öğrencilerinin kullandıkları zihinden toplama işlemi yapma stratejilerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *17*(3), 621-637.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N. ve Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice*, *22*(1), 36-46. doi:10.1111/j.1540-5826.2007.00229.x

Kalaycıoğlu Akis, Ç. ve Şahin, Ç. (2023). İlkokul 2. sınıf matematik öğretiminde toplama ve çıkarma işlemi becerilerinde kullanılan yöntemler. *Uluslararası Bilim ve Eğitim Dergisi*, *6*(2), 89-106. doi:10.47477/ubed.1326167

Kayhan-Altay, M. (2023). İlkokul öğrencilerinin sayıların parça-bütün ilişkisine yönelik toplama işlemlerindeki performanslarının ve stratejilerinin incelenmesi. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 57, 1887-1905. doi:10.53444/deubefd.1300137

Lincoln, Y. S. ve Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Miles, M. B., Huberman, A. M. ve Saldana, J. (2014). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (4. bs.). Thousand Oaks, CA: Sage.Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *Elementary and middle school mathematics program: Grades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, and 8*. Ankara: MEB.

Mulligan, J. (2004). Key aspects of early number learning. A. McIntosh ve L. Sparrow (Ed.), *Beyond written computation* içinde (s. 17-29). Florida: MASTEC, Edith Cowan University.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia, ABD: NCTM.

Okamoto, Y. ve Case, R. (1996). Exploring the microstructure of children's central conceptual structures in the domain of number. *Monographs of the Society for research in Child Development, 61*(1-2), 27-58. doi:10.1111/j.1540-5834.1996.tb00536.x

Paliwal, V. ve Baroody, A. J. (2020). Fostering the learning of subtraction concepts and the subtraction-as-addition reasoning strategy. *Early Childhood Research Quarterly*, *51*, 403-415. doi:10.1016/j.ecresq.2019.05.008

Pongsakdi, N., Kajamies, A., Veermans, K., Lertola, K., Vauras, M. ve Lehtinen, E. (2020). What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 33-44. doi:10.1007/s11858-019-01118-9

Russo, J. ve Hopkins, S. (2018). Measuring mental computational fluency with addition: A novel approach. J. Hunter, P. Perger ve L. Darragh (Ed.). *Making waves, opening spaces (Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* içinde (s. 661-668). MERGA.

Schiffman, J. ve Laski, E. V. (2018). Materials count: Linear-spatial materials improve young children's addition strategies and accuracy, irregular arrays don't. *PLoS ONE, 13*(12), e0208832. doi:10.1371/journal.pone.0208832

Sievert, H., van den Ham, A. K., Niedermeyer, I. ve Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, *74*, 101716. doi:10.1016/j.lindif.2019.02.006

Sunde, P. B. ve Sunde, P. (2019). Development and variance components in single-digit addition strategies in year one. U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen ve M. Veldhuis (Ed.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* içinde. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02401094 adresinden erişildi.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. ve Ghesquière, P. (2005). Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 1-21. doi:10.1207/s1532690xci2301_1

Üstündağ, M. ve Özçakır Sümen, Ö. (2023). Sınıf öğretmeni adaylarinin zihinden toplama işlemi yaparken kullandıkları stratejilerin incelenmesi. *Trakya Eğitim Dergisi*, *13*(3), 1929-1941. doi:10.24315/tred.1259021

Van De Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8. bs.). Londra: Pearson Education.

VERBI Software. (2019). MAXQDA 2020 [computer software]. Berlin, Germany: VERBI Software. maxqda.com adresinden erişildi.

Verschaffel, L., De Smedt, B., Van Der Auwera, S. ve Torbeyns, J. (2021). Subtraction by addition: A remarkably natural and clever way to subtract?. W. Fias ve A. Henik (Ed.), *Heterogeneous contributions to numerical cognition: Learning and education in mathematical cognition* içinde (s. 117-141). Cambridge, Massachusetts, ABD: Academic Press.

Verschaffel, L., Greer, B. ve DeCorte, E. (2007). Whole number concepts and operations. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* içinde (s. 557-628). Kuzey Carolina: Information Age Publishing.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. ve Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 1-16. doi:10.1007/s11858-020-01130-4

Wright, J., Mulligan, J. ve Gould, P. (2000). Extending the learning framework to multiplication and division. J. Wright, J. Narlland ve A. Staffod (Ed.), *Assessment for teaching and intervention* içinde (s. 154-176). Londres, Inglaterra: PCP.

Wright, R. (1998). An overview of a research-based framework for assessing and teaching early number. C. Kanes, M. Goos ve E. Warren (Ed.), *Teaching mathematics in new times. Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* içinde (s. 701-708). MERGA.

Zur, O. ve Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 121-137. doi:10.1016/j.ecresq.2004.01.003